

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-WIEN
K. GIRKMANN-WIEN · F. HOPFNER-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN
E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN · K. WOLF-WIEN

SCHRIFTFLEITUNG

F. MAGYAR-WIEN und K. WOLF-WIEN

BAND III, HEFT 1

MIT 44 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 2. JANUAR 1949)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1949

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20 — 25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Rezeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Rezeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band III, Heft 1

Inhaltsverzeichnis

Originalarbeiten.

	Seite
F. Bauer , Die dreiseitig gelagerte und am freien Rand belastete rechteckige Platte. (Mit 6 Textabbildungen.)	1
A. Reuschel , Über ein einheitliches kinematisches Konstruktionsprinzip zur Ermittlung der Krümmung von Bahnkurven und Hüllbahnen. (Mit 17 Textabbildungen.)	9
G. Heinrich , Kreiselwirkung bei Schwungradschwingungen. (Mit 1 Textabbildung.)	23
H. Haener , Schwingungen zweier zusammengesetzter Balken. (Mit 4 Textabbildungen.)	30
W. Glaser , Zentrierung und Auflösungsvermögen beim Übermikroskop. (Mit 5 Textabbildungen.)	39
R. Schön , Zulässigkeitsgrenzen für das Rechnen mit effektiven Komponenten, die größte mögliche Temperaturspitze. (Mit 6 Textabbildungen.)	46
H. Kastner , Der Erddruck auf Stützmauern als ebenes Spannungsproblem. (Mit 5 Textabbildungen.)	77

Persönliches.

Professor St. Timoshenko zum 70. Geburtstage. (K. Girkmann)	91
--	----

Buchbesprechungen

Girkmann K., Flächentragwerke (K. Federhofer). — Richter L., Verbrennungsmotorenlehrbilder aus H. List, Die Verbrennungskraftmaschine (P. Hold). — Ferguson A., The Philosophical Magazine (L. Kirste). — Cottrell A. H., Theoretical Structural Metallurgy (F. Regler). — Booth A. D., Fourier Technique in X-Ray Organic Structure Analysis (F. Regler). — Fritzsche J. †, Massivbrücken (F. Pongratz). — Thirring H., Die Idee der Relativitätstheorie, 3. Aufl. (F. Magyar). — Sexl Th., Vorlesungen über Kernphysik (F. Regler).

Die dreiseitig gelagerte und am freien Rand belastete rechteckige Platte.

Von F. Bauer, Linz a. D.

Mit 6 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Es werden die Schnittkräfte der am freien Rand belasteten Platte mit dem Ansatz

$$w = \cos kx \cdot A \cdot e^{ky} + B \cdot e^{-ky} + C \cdot k \cdot y \cdot e^{ky} + D \cdot (-k \cdot y \cdot e^{-ky})$$

für die Durchbiegung gefunden. „ k “ ist eine von der Spannweite der Platte und von der Anzahl der cos-förmigen Halbwellen der Belastung abhängige Größe. Bei Vernachlässigung der Querdehnung werden die Konstanten A, B, C, D in ihrer Abhängigkeit vom Seitenverhältnis und der Halbwellenzahl errechnet und wird diese Abhängigkeit in Diagrammen dargestellt. Außerdem wird eine Darstellung der Schnittkräfte für den Grenzfall des randbelasteten Halbstreifens gebracht.

Summary. The internal effort at any cross section of the plate, loaded on its free border, is obtained by putting for the deflection

$$w = \cos kx \cdot A \cdot e^{ky} + B \cdot e^{-ky} + C \cdot k \cdot y \cdot e^{ky} + D \cdot (-k \cdot y \cdot e^{-ky})$$

“ k ” being a quantity depending on the aspect ratio of the plate and the number of cosine-waves of the load. Neglecting the lateral contraction, the constants A, B, C and D are computed as functions of the aspect ratio and the number of half-waves. The diagrams represent these relations, as well as the internal efforts for the limiting case of a half-strip loaded on its free border.

Résumé. L'effort intérieur, dans une section droite quelconque de la plaque, sollicitée à son bord libre, est obtenu en posant, pour la déflexion

$$w = \cos kx \cdot A \cdot e^{ky} + B \cdot e^{-ky} + C \cdot k \cdot y \cdot e^{ky} + D \cdot (-k \cdot y \cdot e^{-ky})$$

« k » étant une quantité dépendant de l'allongement de la plaque et du nombre des demies-ondes sinusoïdales qui représentent la charge appliquée. En négligeant la contraction latérale, les constantes sont calculées en fonction de l'allongement et du nombre des demies-ondes. Les diagrammes représentent cette relation ainsi que les efforts intérieurs dans le cas limite d'une demie-bande, chargée à son bord libre.

Die Theorie der Platten verlangt, daß die Durchbiegungen „ w “ der Platte, wenn diese nur an ihren Rändern belastet ist, der folgenden Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (1)$$

Die Differentialgleichung wird erfüllt durch den Ansatz:

$$w = \cos kx [A e^{ky} + B e^{-ky} + C k y \cdot e^{ky} + D (-k y \cdot e^{-ky})]. \quad (2)$$

$$k = \frac{n\pi}{a}; \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots$$

$$r = k \cdot b = n\pi \cdot \frac{b}{a}.$$

Die Konstanten A , B , C und D werden durch die Randbedingungen an den Rändern $y = 0$ und $y = b$ bestimmt.

Die Randbedingungen längs der Ränder $x = \pm \frac{a}{2}$ werden durch den Ansatz von w nach den Gliedern einer Fourierschen Reihe bereits erfüllt.

Vernachlässigt man die Querdehnung, was für Stahlbetonplatten wohl zulässig ist, so erhält man aus der Durchbiegung für die Schnittkräfte folgende Beziehungen:

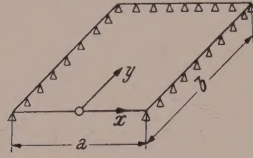


Abb. 1.

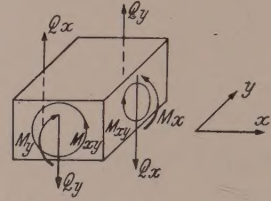


Abb. 2.

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_x}{N} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = +k^2 w = +k^2 \cdot \cos kx [A e^{ky} + B e^{-ky} + C k y \cdot e^{ky} + D (-k y \cdot e^{-ky})]; \\ \frac{M_y}{N} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -k^2 \cos kx [A e^{ky} + B e^{-ky} + C e^{ky} (2 + ky) + D e^{-ky} (2 - ky)]; \\ \frac{M_{xy}}{N} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = +k^2 \sin kx [A e^{ky} - B e^{-ky} + C e^{ky} (1 + ky) - D \cdot e^{-ky} (1 - ky)]; \\ \frac{Q_x}{N} &= -\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = k^3 \cdot \sin kx [2 C e^{ky} + 2 D e^{-ky}]; \\ \frac{Q_y}{N} &= -\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y^2} = -k^3 \cos kx [2 C e^{ky} - 2 D e^{-ky}]; \\ \frac{A_x}{N} &= \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = -k^3 \sin kx [A e^{ky} + B e^{-ky} + C e^{ky} (4 + ky) + D e^{-ky} (4 - ky)]; \\ \frac{A_y}{N} &= \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y^2} = +k^3 \cos kx [-A e^{ky} + B e^{-ky} + C e^{ky} (1 - ky) - D e^{-ky} (1 + ky)]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Hierin bedeuten: E = Elastizitätsmodul, h = Plattenstärke, $N = \frac{E \cdot h^3}{12}$, M = Momente, Q = Querkräfte, A = Auflagerkräfte.

Wir bestimmen nun für vier Fälle aus den Randbedingungen die vier Konstanten des Lösungsansatzes. Es läßt sich zeigen, daß die Konstanten in geschlossener Form, nur abhängig von n und r , dem $n\pi$ -fachen Seitenverhältnis $\frac{b}{a}$, ausdrückbar sind.

1. Der Rand $y = 0$ ist belastet mit $p = N k^3 \cos kx$. Der Rand $y = b$ ist frei drehbar gelagert. Man erhält aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} y = 0 &\rightarrow M_y = 0, \\ y = 0 &\rightarrow A_y = N k^3 \cos kx, \\ y = b &\rightarrow M_y = 0, \\ y = b &\rightarrow w = 0 \end{aligned}$$

für die Konstanten die Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{2(e^{-2r} - r - 1)}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r}; & B &= \frac{2(e^{2r} + r - 1)}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r}; \\ C &= \frac{1 - e^{-2r}}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r}; & D &= \frac{1 - e^{2r}}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

An der Stelle $\begin{smallmatrix} x=0 \\ y=0 \end{smallmatrix}$ interessieren noch die Werte für die Durchbiegung und die Verdrehung; es wird die Durchbiegung $w_0 = A + B$ und die Verdrehung $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = k(A - B + C - D)$; wird $\frac{b}{a} = \infty$ (Halbstreifen), so wird $w_0 = +\frac{2}{3}$, $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = -\frac{k}{3}$.

2. Der Rand $y = 0$ ist belastet mit $M_y = -N k^2 \cos kx$. Der Rand $y = b$ ist frei drehbar gelagert. Man erhält aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} y = 0 &\rightarrow M_y = -N k^2 \cos kx, \\ y = 0 &\rightarrow A_y = 0, \\ y = b &\rightarrow M_y = 0, \\ y = b &\rightarrow w = 0 \end{aligned}$$

die Konstanten zu

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{-e^{-2r} + 2r - 1}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r}; & \beta &= \frac{e^{2r} + 2r + 1}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r}; \\ \gamma &= \frac{-(1 + e^{-2r})}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r}; & \delta &= \frac{1 + e^{2r}}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

An der Stelle $\begin{smallmatrix} x=0 \\ y=0 \end{smallmatrix}$ wird die Durchbiegung $w_0 = \alpha + \beta$ und die Verdrehung $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = k(\alpha - \beta + \gamma - \delta)$; ist $\frac{b}{a} = \infty$ (Halbstreifen), so wird $w_0 = +\frac{2}{3}$ und $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = -\frac{2k}{3}$.

Da nach dem Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebung $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0^{P=1} = w_0^{M=1}$ sein muß, folgt zur Kontrolle die Beziehung

$$\underline{A - B + C - D = -(\alpha + \beta)}. \quad (6)$$

3. Der Rand $y = 0$ ist belastet mit $p = N k^3 \cos kx$. Der Rand $y = b$ ist starr eingespannt. Die Randbedingungen

$$\begin{aligned} y = 0 &\rightarrow M_y = 0, \\ y = 0 &\rightarrow A_y = N k^3 \cos kx, \\ y = b &\rightarrow w = 0, \\ y = b &\rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

ergeben die Konstanten

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{-2(e^{-2r} + r^2 + 2r + 1)}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; \\ B_1 &= \frac{2(e^{2r} + r^2 - 2r + 1)}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; \\ C_1 &= \frac{e^{-2r} + 2r + 3}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; \\ D_1 &= \frac{-(e^{2r} - 2r + 3)}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

An der Stelle $\begin{smallmatrix} x=0 \\ y=0 \end{smallmatrix}$ wird $w_0 = A_1 + B_1$ und $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = k(A_1 - B_1 + C_1 - D_1)$; für $\frac{b}{a} = \infty$ wird $w_0 = +\frac{2}{3}$; $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = -\frac{k}{3}$.

4. Der Rand $y = 0$ ist belastet mit $M_y = -N k^2 \cos kx$. Der Rand $y = b$ ist starr eingespannt. Die Randbedingungen

$$\begin{aligned} y = 0 &\rightarrow M_y = -N k^2 \cos kx, \\ y = 0 &\rightarrow A_y = 0, \end{aligned}$$

$$y = b \rightarrow w = 0,$$

$$y = b \rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

ergeben die Konstanten:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{e^{-2r} + 2r^2 - 2r - 1}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; \\ \beta_1 &= \frac{e^{2r} + 2r^2 + 2r - 1}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; \\ \gamma_1 &= \frac{e^{-2r} - 2r + 3}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; \\ \delta_1 &= \frac{e^{2r} + 2r + 3}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r^2 + 10}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

An der Stelle $\frac{x}{y} = 0$ wird wiederum $w_0 = \alpha_1 + \beta_1$ und $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = k(\alpha_1 - \beta_1 + \gamma_1 - \delta_1)$; für den Halbstreifen $\frac{b}{a} = \infty$ wird $w_0 = +\frac{2}{3}$; $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2 = -\frac{2k}{3}$.

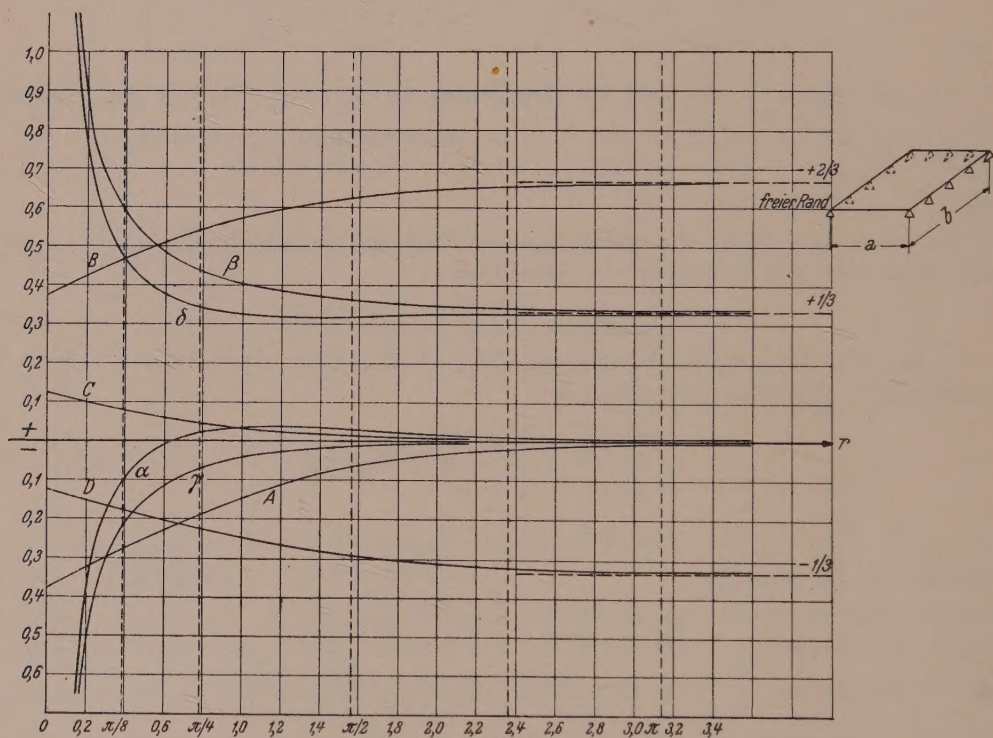


Abb. 3.

$$r = bk = \frac{n\pi b}{a}, \quad k = \frac{n\pi}{a}.$$

$$A = \frac{2(e^{2r} + r - 1)}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r};$$

$$C = \frac{1 - e^{-2r}}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r};$$

$$B = \frac{2(e^{2r} + r - 1)}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r};$$

$$D = \frac{1 - e^{2r}}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r};$$

$$\alpha = \frac{-e^{-2r} + 2r - 1}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r};$$

$$\gamma = \frac{-(1 + e^{-2r})}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r};$$

$$\beta = \frac{e^{2r} + 2r + 1}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r};$$

$$\delta = \frac{1 + e^{2r}}{3(e^{2r} - e^{-2r}) + 4r};$$

Entsprechend (6) muß auch hier die Beziehung gelten:

$$A_1 - B_1 + C_1 - D_1 = -(\alpha_1 + \beta_1). \quad (9)$$

Die Papierknappheit verbietet eine Wiedergabe der Werte $A, B, C, \dots$ sowie der verschiedenen Funktionswerte in Tabellenform, es sind lediglich die Werte A, B, C, D und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bzw. die Werte A_1, B_1, C_1, D_1 und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ in je einem Diagramm in ihrer Abhängigkeit von $r = n\pi \frac{b}{a}$ dargestellt.

Es sei noch erwähnt, daß bei antimetrischer Belastung des freien Randes mit $A_y = Nk^3 \sin kx$ bzw. $M_y = -Nk^2 \sin kx$ mit $n = 2, 4, 6, 8, \dots$, der gleiche Lösungsansatz verwendet werden kann, nur ist in (2) $\cos kx$ durch $\sin kx$ zu ersetzen. Folglich erhält man für die Konstanten A, B, C, D und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ bzw. A_1, B_1, C_1, D_1 und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ die gleichen Beziehungen wie für die symmetrische Belastung.

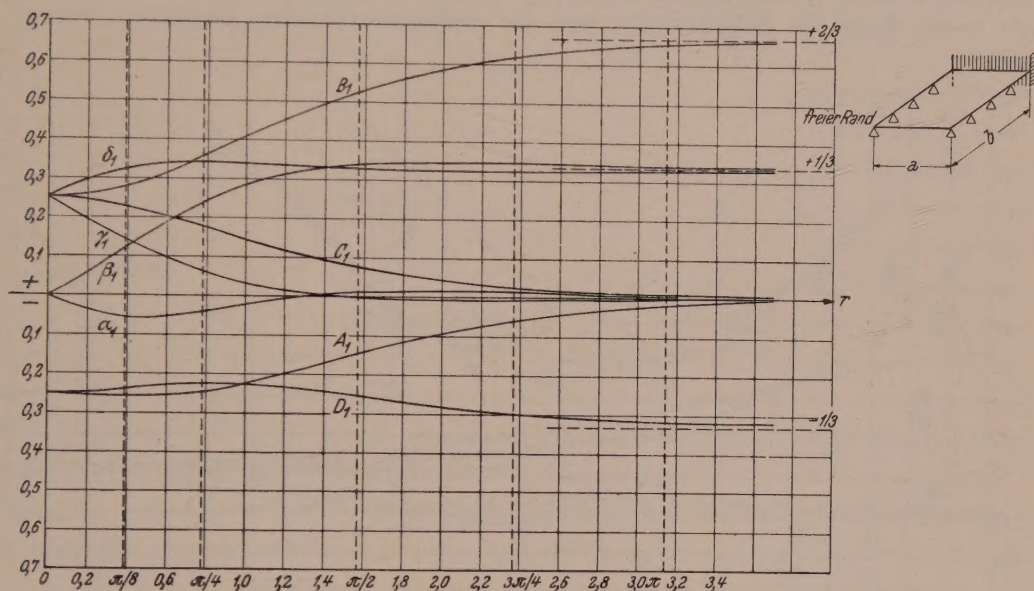


Abb. 4.

$$r = bk \frac{n\pi b}{a}, \quad k = \frac{n\pi}{a}.$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{-2(e^{-2r} + r^2 + 2r + 1)}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; & C_1 &= \frac{e^{-2r} + 2r + 3}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; \\ B_1 &= \frac{2(e^{2r} + r^2 - 2r + 1)}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; & D_1 &= \frac{-(e^{2r} - 2r + 3)}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; \\ \alpha_1 &= \frac{e^{-2r} + 2r^2 - 2r - 1}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; & \gamma_1 &= \frac{e^{-2r} - 2r + 3}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; \\ \beta_1 &= \frac{e^{2r} + 2r^2 + 2r - 1}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}; & \delta_1 &= \frac{e^{2r} + 2r + 3}{3(e^{2r} + e^{-2r}) + 4r^2 + 10}. \end{aligned}$$

Aus diesen Darstellungen sieht man, daß sowohl die Koeffizienten A, B, C, D und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sowie auch A_1, B_1, C_1, D_1 und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ bei $r \gg \pi$ für beide Lagerungsarten schon sehr nahe an die Werte des Halbstreifens, nämlich

$$\begin{aligned} A &= A_1 = 0; & \alpha &= \alpha_1 = 0; \\ B &= B_1 = +\frac{2}{3}; & \beta &= \beta_1 = +\frac{1}{3}; \end{aligned}$$

$$C = C_1 = 0; \quad \gamma = \gamma_1 = 0;$$

$$D = D_1 = -\frac{1}{3}; \quad \delta = \delta_1 = +\frac{1}{3}$$

heranreichen.

Zieht man nur $n = 1$, also die erste Harmonische einer Fourierschen Reihe in Betracht, so bedeutet dies, daß Platten mit den Seitenverhältnissen $\frac{b}{a} \geq 1$, als am Rande belastete Halbstreifen betrachtet werden können. Bei den höheren Harmonischen ist das Seitenverhältnis entsprechend kleiner, so daß für $n > 1$ wohl in allen praktisch vorkommenden Fällen der Halbstreifen zur Berechnung herangezogen werden kann. Da also dem am freien Rand belasteten Halbstreifen ($r = \infty$; $\frac{b}{a} = \infty$) in sehr vielen Fällen der Berechnung von dreiseitig gelagerten Platten eine Bedeutung zukommt, sollen für die beiden Lastfälle 1. $p = N k^3 \cos kx$, 2. $M_y = -N k^2 \cos kx$ am freien Rand die Schnittkräfte und die Auflagerreaktionen angegeben werden.

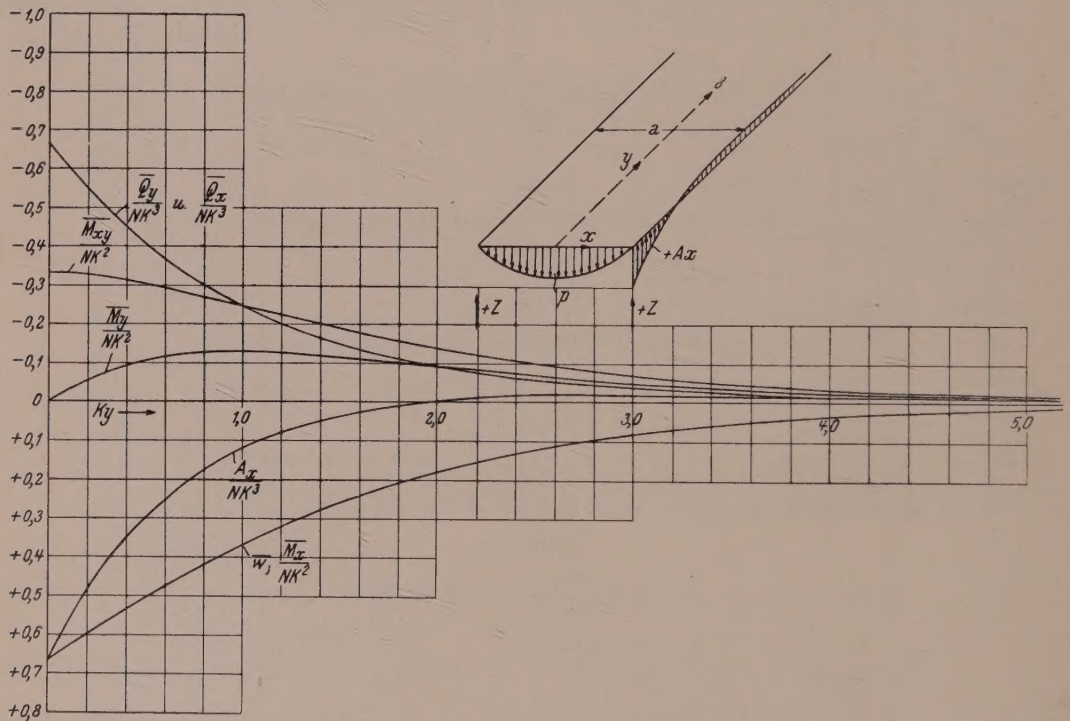


Abb. 5.

Randbelastung mit $p = N k^3 \cos kx$, $k = \frac{n\pi}{a}$, $N = \frac{E h^3}{12}$.

$$+Z = -2 M_{xy} = +\frac{2}{3} N k^2 = +0,667 N k^2.$$

1. Randbelastung mit $p = N k^3 \cos kx$ nach (4) oder (7)

$$A = 0;$$

$$B = +\frac{2}{3};$$

$$C = 0;$$

$$D = -\frac{1}{3}$$

und nach (3) erhält man

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{e^{-ky}}{3} (2 + ky) \cos kx; \\ \frac{M_x}{N} &= \frac{k^2 e^{-ky}}{3} (2 + ky) \cos kx; \\ \frac{Q_x}{N} &= -\frac{2}{3} k^3 e^{-ky} \cdot \sin kx; \\ \frac{M_y}{N} &= -\frac{k^2 e^{-ky}}{3} \cdot ky \cdot \cos kx; \\ \frac{Q_y}{N} &= -\frac{2}{3} k^3 e^{-ky} \cdot \cos kx; \\ \frac{M_{xy}}{N} &= -\frac{k^2}{3} e^{-ky} (1 + ky) \cdot \sin kx; \\ \frac{A_x}{N} &= +\frac{k^3}{3} e^{-ky} (2 - ky) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

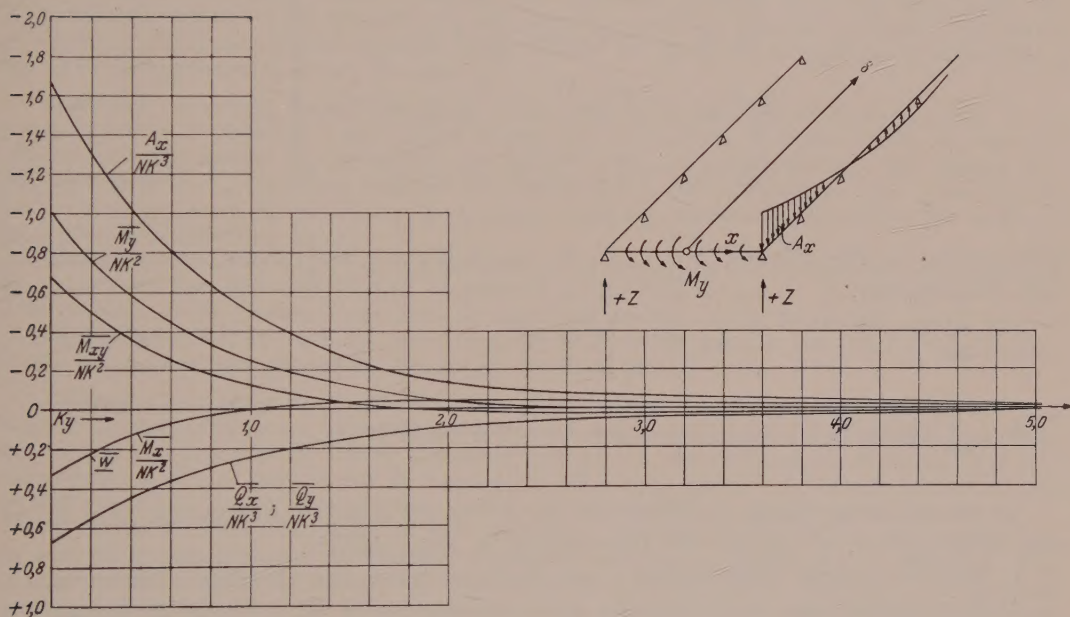


Abb. 6.

Randbelastung mit $M_y = -k^2 N \cos kx$, $k = \frac{n\pi}{a}$.

$$+Z = -2M_{xy} = +\frac{4}{3} N k^2 = +1,333 N k^2.$$

Stützkkräfte in den Ecken $x = \pm \frac{a}{2}$, $Z = -2M_{xy} = +\frac{2}{3} N k^2$; zur Kontrolle muß sein:

a) $\sum V = 0:$

$$-\frac{a}{2} \int_0^{+\frac{a}{2}} p \cdot dx = 2 \int_0^\infty A_x \cdot dy + 2Z,$$

b) $\sum M_y = 0:$

$$\int_0^\infty A_x \cdot y \cdot dy = 0.$$

2. Belastung des freien Randes mit $M_y = -N k^2 \cos k x$; nach (5) oder (8) wird

$$\begin{aligned}\alpha &= 0; \\ \beta &= +\frac{1}{3}; \\ \gamma &= 0; \\ \delta &= +\frac{1}{3};\end{aligned}$$

nach (3) erhält man:

$$\left. \begin{aligned}w &= \frac{e^{-ky}}{3} (1 - ky) \cdot \cos kx; \\ \frac{M_x}{N} &= -\frac{k^2 e^{-ky}}{3} (1 - ky) \cdot \cos kx; \\ \frac{Q_x}{N} &= +\frac{2}{3} \cdot k^3 e^{-ky} \cdot \sin kx; \\ \frac{M_y}{N} &= -\frac{k^2 e^{-ky}}{3} (3 - ky) \cdot \cos kx; \\ \frac{Q_y}{N} &= +\frac{2}{3} k^3 e^{-ky} \cdot \cos kx; \\ \frac{M_{xy}}{N} &= -\frac{k^2 e^{-ky}}{3} (2 - ky) \cdot \sin kx; \\ \frac{A_x}{N} &= -\frac{k^3 e^{-ky}}{3} (5 - ky)\end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Stützkkräfte in den Ecken $x = \pm \frac{a}{2}, y = 0, Z = -2 M_{xy} = +\frac{4}{3} N k^2$; zur Kontrolle muß wieder sein:

$$1. \quad \sum V = 0: \quad \int_0^{\infty} A_x \cdot dy + Z = 0.$$

$$2. \quad \sum M = 0: 2 \int_0^{\infty} A_x \cdot y \cdot dy = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} -N k^2 \cos kx \cdot dx.$$

Ist die dreiseitig gelagerte Platte auf ihrer Fläche belastet und ist der freie Rand von Kräften frei, so erfolgt die Berechnung in zwei Stufen.

1. Berechnung der Schnittkräfte und Auflagerkräfte bei allseitiger Lagerung,

2. Berechnung der Schnittkräfte und Auflagerkräfte der dreiseitig gelagerten Platte, belastet mit den negativen Auflagerkräften des Zustandes „1“, angreifend am freien Rand, wodurch die Bedingung des freien, kräftefreien Randes wieder hergestellt wird.

Hierauf werden die Zustände „1“ und „2“ überlagert.

Die hier angegebenen Lösungen sind nur brauchbar, wenn die zum freien Rand senkrecht stehenden Ränder frei drehbar sind.

(Eingegangen am 31. Juli 1946.)

Über ein einheitliches kinematisches Konstruktionsprinzip zur Ermittlung der Krümmung von Bahnkurven und Hüllbahnen.

Ein Beitrag zur Geometrie der Getriebe und zur graphischen Differentialgeometrie ebener Kurven.

Von A. Reuschel, Wien.

Mit 17 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Zu jeder ebenen Kurve kann man auf Grund ihrer Entstehung oder ihrer Eigenschaften einen ebenen Zwanglaufmechanismus angeben, bei dessen Bewegung ein Punkt C_m des Systems S_m im System S_e die gegebene Kurve c_e beschreibt, während eine durch C_m gehende Gerade von S_m auf der Evolute von c_e ohne zu gleiten abrollt. Der Relativpol der Systeme S_e und S_m ist dann zugleich der Krümmungsmittelpunkt für den von C_m eben durchlaufenen Punkt der Kurve c_e .

In der Arbeit wird gezeigt, wie man zu einer gegebenen Kurve derartige Mechanismen auffinden und hierauf mittels des zugehörigen Drehpolplanes die Kurvenkrümmung ermitteln kann. Sodann werden mit Hilfe dieses einfachen und allgemein-gültigen Konstruktionsprinzips die Krümmungskreise für einige geometrisch und technisch wichtige Kurven bestimmt. Die dabei gewonnenen Ergebnisse stellen zugleich einen Beitrag zur graphisch-kinematischen Behandlung der Differentialgeometrie ebener Kurven dar.

Summary. Knowing the properties, or the method of generation, of a plane curve, it is always possible to indicate a mechanical device, the movement of which forces a point C_m , connected to the system S_m , to describe the given curve c_e , whereas a straight line through C_m , and belonging to S_m , develops itself on the evolute of c_e without gliding. The instantaneous center of the systems S_e and S_m is, in the same time, the center of curvature of the curve c_e , in a point corresponding to C_m .

The paper shows how to find such a mechanism, corresponding to a given curve, when knowing its pattern of instantaneous centers of rotation of the two systems. An application to the determination of the circles of curvature is shown for several curves, presenting special interest from the geometrical, or technical, point of view. The results obtained constitute a contribution to the kinematical and geometrical treatment of plane curves.

Résumé. Connaissant les propriétés d'une courbe plane, ou la façon dont elle est obtenue, on peut toujours indiquer un dispositif mécanique tel, que le déplacement d'un point C_m , solidaire du système S_m , engendre la courbe c_e dans le système S_e , alors qu'une droite passant par C_m , appartenant à S_m se déroule sur la développée de c_e sans glisser. Le centre instantané des systèmes S_e et S_m est en même temps le centre de courbure de la courbe c_e , au droit de C_m .

Le travail démontre comment on peut trouver le mécanisme engendrant une courbe dont on connaît la configuration représentant l'ensemble des centres instantanés de rotation. Une application de la méthode est faite à la détermination des cercles de courbure pour quelques courbes intéressantes au point de vue géométrique ou technique. Les résultats acquis consistent une contribution à l'étude graphique et cinématique de la géométrie différentielle des courbes planes.

1. Einleitung.

Zahlreiche Fragen der Getriebetechnik erfordern die Kenntnis von Tangenten- und Krümmungseigenschaften der Bahnkurven, Eingriffslinien, Hüllbahnen und Polbahnen. Wegen ihrer Wichtigkeit gibt es hierüber eine ausgedehnte Literatur. Es wurden die verschiedenartigsten Konstruktionen ersonnen, die aber häufig nur auf einen engbegrenzten Kreis von gleichartigen Fällen anwendbar sind. Dies trifft in besonderem Maße für die Krümmungskonstruktionen zu, die sich außerdem noch auf zum Teil ziemlich tiefliegende Ergebnisse der Bewegungsgeometrie stützen oder mit Bahngeschwindigkeiten und Bahnbeschleunigungen arbeiten, die aber für die Ermittlung der Krümmung durchaus nicht erforderlich sind.

Unter diesen den Einzelfällen angepaßten Krümmungsmittelpunktskonstruktionen finden sich viele reizvolle geometrische Gedanken, die jedoch der Einheitlichkeit entbehren. Das Fehlen eines gemeinsamen Konstruktionsprinzips ist aber auch der

Grund, warum diese Konstruktionen in der Getriebetechnik nur selten verwendet werden, obwohl eine graphische Krümmungskreisermittlung immer schon wünschenswert war.

Das in der vorliegenden Arbeit aufgestellte allgemeingültige Konstruktionsprinzip zur Ermittlung der Kurvenkrümmung gründet sich auf die Tatsache, daß man für jede ebene Kurve auf Grund ihrer Entstehung oder ihrer Eigenschaften einen ebenen Zwanglaufmechanismus angeben kann, der aus den Gliedern $S_1, S_2 \dots S_m$ bestehen möge, bei dessen Bewegung ein Punkt des Systems S_m im (ruhend gedachten) System S_1 die zu betrachtende Kurve beschreibt,¹ während eine durch diesen Punkt gehende Gerade des Systems S_m ständig mit der zugehörigen Kurvennormalen zusammenfällt. Die durch den Kurvenpunkt dazu senkrecht verlaufende Gerade des Systems S_m deckt sich dann zugleich ständig mit der Kurventangente. Dieser Mechanismus gewährleistet also, daß die Normale der zu untersuchenden Kurve auf ihrer Evolute abrollt.

Die relativen Drehpole bilden in jeder Stellung des Mechanismus eine bestimmte Polfigur, die sich aus den von vornherein gegebenen Drehpolen leicht vervollständigen läßt. Der Drehpol $1m$ ist dann zugleich der Krümmungsmittelpunkt für den eben durchlaufenen Punkt der Kurve.

Nach diesen Erörterungen ist das Auffinden der erwähnten Mechanismen der Hauptpunkt dieses Konstruktionsprinzips. Nach einigen Bemerkungen zur Theorie der Polkonfigurationen wird im folgenden zunächst gezeigt, wie man zu diesen für Krümmungskreiskonstruktionen grundlegenden Mechanismen gelangen kann. Sodann werden die Krümmungskreise für einige geometrisch und technisch wichtige Kurven mit Hilfe dieses Verfahrens bestimmt. Die dabei gewonnenen Ergebnisse stellen zugleich einen Beitrag zur graphisch-kinematischen Behandlung der Differentialgeometrie der ebenen Kurven dar.

2. Die Konfiguration der Drehpole einer zwangsläufigen ebenen kinematischen Kette.

Eine ebene Bewegung eines Systems gegen ein anderes, bei der die Lage des Momentanpols in jedem Augenblick vollkommen bestimmt ist, heißt zwangsläufig. Bei einer zwangsläufigen Bewegung ist jeder beliebige Punkt eines jeden Systems im anderen System an eine ganz bestimmte Bahnkurve gebunden.

Eine Aneinanderreihung von mehreren, entweder durch Gelenke und Schieber oder durch Gleitkurven miteinander verbundenen beweglichen Systemen derselben Ebene nennt man eine ebene kinematische Kette. Führt jedes System einer solchen Kette gegen jedes andere eine Zwanglaufbewegung aus, hat also jedes Glied gegen jedes andere in jedem Augenblick des Bewegungsablaufs einen ganz bestimmten Drehpol, so spricht man von einer zwangsläufigen Kette.

Zu einer aus n Gliedern bestehenden zwangsläufigen kinematischen Kette gehören in jedem Augenblick $\binom{n}{2}$ bestimmte relative Drehpole, die zu je dreien auf einer der $\binom{n}{3}$ Polgeraden liegen. Da außerdem durch jeden Drehpol $n - 2$ Polgeraden gehen, so bildet der aus den Drehpolen und Polgeraden bestehende Drehpolplan² einer zwangsläufigen kinematischen Kette die polyedrale Konfiguration³ mit

¹ Mit S_1 soll auch künftighin immer das ruhende System (Gestell des Mechanismus) bezeichnet werden.

² K. Wolf: Lehrbuch der technischen Mechanik starrer Systeme, S. 210—211. Wien. 1931.

³ Diese ebene Konfiguration wird so genannt, weil sie auch entsteht, wenn man die räumliche Konfiguration, die aus den sämtlichen Verbindungsgeraden und Verbindungsebenen von n Punkten des Raumes besteht, mit einer Ebene schneidet, die durch keinen der angenommenen n Raum-

dem Symbol

$$\left(\binom{n}{2} \right)_{n-2} \left(\binom{n}{3} \right)_3.$$

Im besonderen ergibt sich für $n = 4$ das vollständige Vierseit und für $n = 5$ die Desarguessche Konfiguration.

3. Die Relativbewegungen von drei Gliedern einer kinematischen Zwanglaufkette.

Wir betrachten eine aus den n Systemen $S_1, S_2 \dots S_n$ bestehende zwangsläufige, ebene, kinematische Kette und greifen irgend drei Systeme S_i, S_k, S_l der Kette heraus.

Der Punkt des Systems S_i , der im betrachteten Zeitpunkt gegen das System S_k in Ruhe ist (relativer Drehpol), möge mit P_{ik} oder kurz mit ik bezeichnet werden. Dabei ist $P_{ki} = P_{ik}$. Ebenso sei ω_{ik} die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit, mit der sich das System S_i um den Punkt P_{ik} gegen das System S_k dreht.

Werden Winkelgeschwindigkeiten von verschiedenem Drehsinn und auf jeder Polgeraden, Strecken von verschiedenem Durchlaufungssinn, durch das Vorzeichen unterschieden, so ist

$$\omega_{ki} = -\omega_{ik}$$

und

$$P_{ik} P_{il} = -P_{il} P_{ik}.$$

Infolge der Drehung von S_i gegen S_l um den Drehpol P_{il} bewegt sich der Punkt P_{ik} gegen S_l mit der Geschwindigkeit

$$P_{il} P_{ik} \cdot \omega_{il}.$$

Der Punkt P_{ki} des Systems S_k , der sich mit dem Punkt P_{ik} des Systems S_i deckt, bewegt sich zufolge der Drehung des Systems S_k um den Drehpol P_{kl} gegen das System S_l mit der Geschwindigkeit

$$P_{kl} P_{ik} \cdot \omega_{kl}.$$

Aus der Gleichheit dieser beiden Geschwindigkeiten folgt die Gleichung

$$\omega_{il} : \omega_{kl} = P_{ik} P_{kl} : P_{ik} P_{il}, \quad (1)$$

aus der sich, da $\omega_{ik} = \omega_{il} + \omega_{kl}$ ist, die fortlaufende Verhältnissgleichung

$$\omega_{ik} : \omega_{kl} : \omega_{il} = P_{il} P_{kl} : P_{ik} P_{il} : P_{kl} P_{ik} \quad (2)$$

ergibt.⁴ Also gilt:

Satz 1: Sind die drei relativen Drehpole bekannt, die zu drei Gliedern einer zwangsläufigen kinematischen Kette gehören, so kennt man damit auch das Verhältnis der augenblicklichen relativen Winkelgeschwindigkeiten der drei Kettenglieder.

Einige in den Anwendungen besonders häufig auftretende Sonderfälle sollen nun noch eigens erwähnt werden.

Aus Gl. (1) ergibt sich, daß für $\omega_{kl} = \omega_{il}$ der Drehpol P_{ik} ein Fernpunkt sein muß. Daher gilt

Satz 2: Drehen sich zwei Glieder einer zwangsläufigen, ebenen, kinematischen Kette gegen ein drittes Glied um ihre im Endlichen liegen-

punkte hindurchgeht. Aus den Ebenen und Geraden der räumlichen Konfiguration entstehen dabei die Geraden und Punkte der ebenen Konfiguration. Die n Raumpunkte müssen nur so gewählt werden, daß nie vier Punkte in einer Ebene, also auch niemals drei Punkte auf einer Geraden liegen.

⁴ M. Grübler: Getriebelehre, S. 55—59. Berlin. 1917. — K. Wolf: Lehrbuch der technischen Mechanik starrer Systeme, S. 209—211. Wien. 1931.

den und voneinander verschiedenen Drehpole mit der gleichen augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit, so ist der Relativpol dieser beiden Kettenglieder ein Fernpunkt und ihre augenblickliche Relativbewegung daher eine Schiebung.

Für $\omega_{kl} = -\omega_{il}$ erhält man aus Gl. (1)

$$P_{il} P_{ik} = P_{ik} P_{kl}$$

und damit

Satz 3: Drehen sich zwei Glieder einer zwangsläufigen, ebenen, kinematischen Kette gegen ein drittes um ihre im Endlichen liegenden und voneinander verschiedenen Drehpole mit entgegengesetzt gleichen augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten, so liegt der Drehpol dieser beiden Kettenglieder in der Mitte der beiden übrigen Relativpole.

Setzen wir in der Ableitung, die zur Formel (1) geführt hat, P_{il} als Fernpunkt voraus, so vollführt das System S_i gegen das System S_l eine Schiebung. Ihre augenblickliche Geschwindigkeit sei v_{il} . An Stelle von Gl. (1) erhalten wir die Beziehung

$$P_{kl} P_{ik} = \frac{v_{il}}{\omega_{kl}}, \quad (3)$$

durch welche der Abstand der beiden eigentlichen Drehpole durch ein Geschwindigkeitsverhältnis ausgedrückt wird. Es besteht somit

Satz 4: Führt das System S_i einer zwangsläufigen, ebenen, kinematischen Kette gegen das Glied S_l eine Schiebung mit der augenblicklichen Geschwindigkeit v_{il} aus, während sich das Glied S_k gegen S_l augenblicklich um den Drehpol P_{kl} mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{kl} dreht, so ist der Drehpol P_{ik} auf der zu v_{il} normalen Polgeraden $P_{il} P_{kl}$ von P_{kl} um $\left| \frac{v_{il}}{\omega_{kl}} \right|$ entfernt, und zwar liegt P_{ik} auf jener Seite von P_{kl} , auf welcher der Vektor v_{il} um P_{kl} im Drehsinn von ω_{kl} zu drehen sucht.

In den Anwendungen tritt der Fall häufig auf, daß das Verhältnis $v_{il} : \omega_{kl}$ während des ganzen Bewegungsablaufs ungeändert bleibt. Zuzufolge (3) bleibt daher bei der Bewegung auch der Abstand der Drehpole P_{ik} und P_{kl} erhalten.

Nimmt man zu den Gliedern S_i, S_k, S_l noch ein weiteres Kettenglied S_m hinzu, das sich gegen S_l mit entgegengesetzt gleicher Schiebungsgeschwindigkeit bewegt wie S_i , so folgt wegen $v_{ml} = -v_{il}$ aus Gl. (3) die Beziehung

$$P_{km} P_{kl} = P_{kl} P_{ik}.$$

Es gilt demnach

Satz 5: Dreht sich das Glied S_k einer zwangsläufigen, ebenen, kinematischen Kette gegen das Glied S_l augenblicklich um den Drehpol P_{kl} , während S_i und S_m gegen S_l entgegengesetzt gleiche Schiebungen ausführen, so liegen die Drehpole P_{ik} und P_{km} symmetrisch zum Drehpol P_{kl} .

4. Über den Aufbau von Mechanismen zur Herleitung von Krümmungskonstruktionen.

Wir wollen uns nun mit dem Aufbau jener Mechanismen befassen, mit deren Hilfe man ganz allgemein Krümmungskonstruktionen für ebene Kurven herleiten kann.

Alle diese Mechanismen beruhen auf jener besonderen Punkt-Kurvenführung, bei der das System S_2 mit dem Punkt P_2 und der durch ihn hindurchgehenden Geraden t_2 so bewegt wird, daß P_2 die Kurve k_1 des Systems S_1 durchläuft und dabei t_2 stets Tangente in dem mit P_2 sich deckenden Punkt von k_1 ist (s. Abb. 1). Das im Punkte P_2 auf die Gerade t_2 errichtete Lot n_2 fällt dann in jedem Zeitpunkt der Be-

wegung mit der Normalen der Kurve k_1 für die eben von P_2 beschriebene Bahnstelle zusammen. k_1 ist in diesem Falle die Punktbahn von P_2 und zugleich die Hüllbahn von t_2 , während die Gerade n_2 die Evolute k_1' von k_1 umhüllt.

Der Momentanpol 12 ist für jede Lage von S_2 jeweils der Berührungspunkt von n_2 mit der Evolute k_1' . 12 ist zugleich Krümmungsmittelpunkt für den von P_2 überdeckten Punkt von k_1 . Die Ortslinie der Momentanpole 12 im System S_1 ist demnach die Evolute k_1' (Rastpolbahn) und im System S_2 die Gerade n_2 (Gangpolbahn).

Die zwangsläufige ebene Bewegung von zwei zueinander normalen Geraden t_2 und n_2 des Systems S_2 , bei der t_2 ständig Tangente und n_2 die zugehörige Normale einer Kurve k_1 von S_1 ist, läßt sich somit durch Abrollen der Geraden n_2 auf der Evolute k_1' von k_1 herstellen.⁵

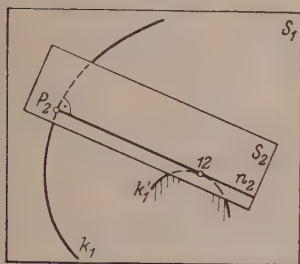


Abb. 1. Punktführung, hervorgebracht durch Abrollen einer Geraden auf der Evolute der Punktbahn.

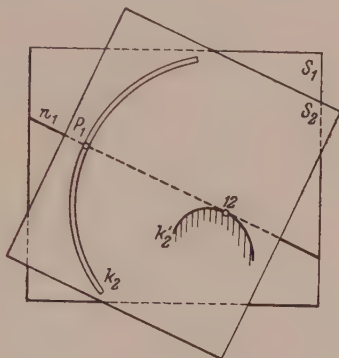


Abb. 2. Bewegung einer Führungskurve durch einen Stützpunkt, hervorgebracht durch Abrollen ihrer Evolute auf einer Geraden.

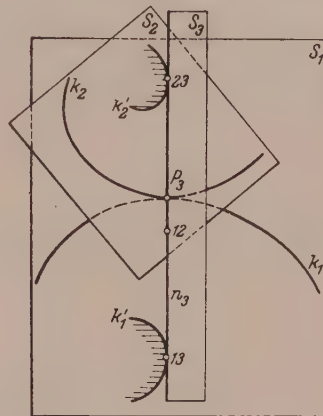


Abb. 3. Abwälzen zweier Führungskurven aufeinander (Kurvenführung), hervorgebracht durch gleichzeitiges Abrollen ihrer Evoluten auf einer Geraden.

Demnach kann ein Punkt P_2 auch dadurch auf einer Kurve k_1 geführt werden (Punktführung), daß die durch den Punkt P_2 gehende und mit ihm fest verbundene Gerade n_2 auf der Evolute k_1' von k_1 abrollt (Abb. 1).

Umgekehrt kann die Führung einer Kurve k_2 durch einen Punkt P_1 (Bewegung durch einen Stützpunkt) durch das Abrollen der Evolute k_2' von k_2 auf der durch P_1 gehenden Geraden n_1 verwirklicht werden (Abb. 2).

Die Gleitführung (Kurvenführung) der Kurve (Gleitkurve) k_2 des bewegten Systems S_2 an der Kurve (Leitkurve) k_1 des Systems S_1 kann auch durch das gleichzeitige Abrollen der Evolute k_1' von k_1 und der Evolute k_2' von k_2 auf der Geraden n_3 des Systems S_3 hervorgebracht werden (Abb. 3). Die Berührungspunkte von n_3 mit k_1' und k_2' sind zugleich die relativen Drehpole 13 bzw. 23. Die Kurven k_1 und k_2 gehen bei dieser Bewegung in jedem Augenblick durch den auf n_3 liegenden festen Punkt P_3 des Systems S_3 und berühren einander dort.

Rollen die beiden Kurven k_1 und k_2 im betrachteten Zeitpunkt gleitungslos aufeinander ab, so gehen die Kurven k_1 und k_2 mit derselben Geschwindigkeit $v_{13} = v_{23}$ durch P_3 . Der Relativpol 12 fällt daher für reines Rollen mit dem Berührungspunkt von k_1 und k_2 zusammen. Wenn aber die Kurven k_1 und k_2 augenblicklich

⁵ E. Müller-E. Kruppa: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, 4. Aufl., S. 32—35. Leipzig und Berlin. 1936. — J. Krames: Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer, S. 173. Wien. 1947.

aufeinander rollen und zugleich gleiten, so deckt sich der momentane Drehpol 12 nicht mit dem Berührungspunkt von k_1 und k_2 .

Sind k_1 und k_2 die Polkurven der ebenen Relativbewegung von S_1 und S_2 , so rollen diese Kurven ständig ohne zu gleiten aufeinander ab und der Drehpol 12 deckt sich daher während der ganzen Bewegung mit dem festen Punkt P_3 des Systems S_3 .

Die in dieser Arbeit entwickelten Krümmungskreiskonstruktionen gründen sich nun alle auf den folgenden grundlegenden

Satz 6: Ersetzt man bei einer mittels Bewegung erzeugten Kurve k jede Punkt- und jede Kurvenführung in der eben beschriebenen Art durch gleitungsloses Rollen von Kurven und Geraden, so lassen sich die Krümmungsmittelpunkte von k durch bloßes Vervollständigen der Polfigur konstruieren, die zu

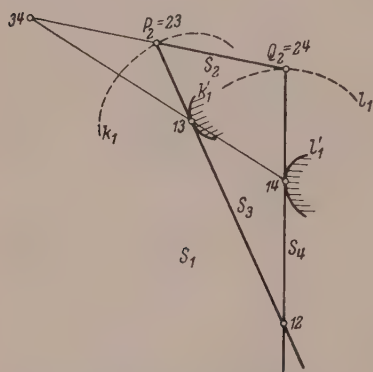


Abb. 4. Zweipunktführung mittels einer viergliedrigen kinematischen Kette, deren Stäbe S_3 und S_4 auf den Evoluten der Führungskurven abrollen.

dem so erhaltenen Mechanismus gehört.

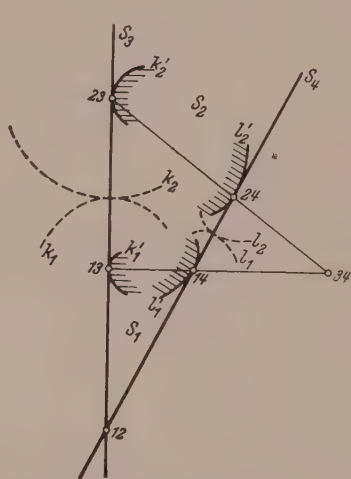


Abb. 5. Zweikurvenführung mittels einer viergliedrigen kinematischen Kette, von der die Stäbe S_3 und S_4 auf den Evoluten des einen bzw. anderen Führungskurvenpaares gleichzeitig abrollen.

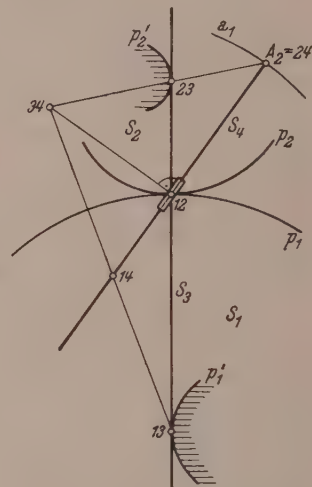


Abb. 6. Krümmungskreis-konstruktion für eine Punkt-bahn bei gegebenen Polbahnen mittels des Drehpol-planes eines Krümmungsmechanismus.

Das eben beschriebene Verfahren zur Herleitung von Krümmungskonstruktionen, durch das jede Punkt- und jede Kurvenführung für den ganzen Bewegungsablauf auf das reine Rollen von Kurven und Geraden zurückgeführt wird, ist jedenfalls viel anschaulicher und weitaus übersichtlicher als der bisher häufig beschrittene Weg, bei dem man diese Führungskurven (Bahnkurven, Gleit- und Leitkurven) in dem betrachteten Augenblick in der Umgebung der zugehörigen Stellen durch ihre Krümmungskreise und demnach von Augenblick zu Augenblick jeweils durch andere Krümmungskreise ersetzt.

Während man nach dem neuen Verfahren mit einem einzigen Mechanismus auskommt, der in jeder beliebigen Stellung den Krümmungskreis für den entsprechenden Punkt der Kurve k ergibt, muß man nach dem bisherigen Verfahren in jedem Zeitpunkt im allgemeinen ein anderes Ersatzgetriebe angeben, das nur den augenblicklichen Bewegungszustand wiedergibt und das man bisher überdies nur in jenen einfachen Fällen verwenden konnte, in denen sich zufällig ein viergliedriges kinematisches Ersatzgetriebe (Gelenkviereck, Schubkurbel-, Kreuzschleifen- und Winkelschleifengetriebe) ergeben hat.

Die Zweipunktführung, bei der zwei Punkte P_2 und Q_2 von S_2 auf den Kurven k_1 bzw. l_1 des Systems S_1 gleiten (Abb. 4), ist nach den Erörterungen dieses Abschnittes durch eine viergliedrige kinematische Kette zu ersetzen, die aus den Gliedern S_1 und S_2 und den in P_2 und Q_2 mit S_2 gelenkig verbundenen Stäben⁶ S_3 bzw. S_4 besteht, die ständig auf den Evoluten k_1' von k_1 bzw. l_1' von l_1 abrollen.

Ebenso ist eine Zweikurvenführung, bei der die beiden Kurven k_2 und l_2 des Systems S_2 auf den in S_1 liegenden Kurven k_1 bzw. l_1 gleiten (Abb. 5), durch ein viergliedriges Getriebe zu ersetzen, das aus S_1 , S_2 und den Stäben S_3 und S_4 besteht, wobei der Stab S_3 gleichzeitig auf den Evoluten k_1' und k_2' von k_1 bzw. k_2 und der Stab S_4 gleichzeitig auf den Evoluten l_1' und l_2' von l_1 bzw. l_2 ohne zu gleiten abrollt.

Die folgenden Abschnitte sollen zeigen, in welcher einfacher Weise sich nun die Krümmungskreise von Bahnkurven und Hüllbahnen konstruieren lassen.⁷

5. Konstruktion der Krümmungskreise von Bahnkurven und Hüllbahnen.

a) p_1 und p_2 seien die Polbahnen für die zwangsläufige gegenseitige Bewegung der Systeme S_1 und S_2 , ferner sei A_2 ein Punkt des Systems S_2 und a_1 die von ihm in S_1 beschriebene Bahnkurve.

Zur Konstruktion der Krümmungskreise der Punktbahn a_1 denken wir uns die geforderte ebene Bewegung durch einen Zwanglaufmechanismus hervorgebracht (Abb. 6), welcher aus der die Evolute p_1' von p_1 enthaltenden Systemebene S_1 und der mit der Evolute p_2' von p_2 ausgestatteten Systemebene S_2 sowie den beiden Stäben S_3 und S_4 besteht. Dabei rollt der Stab S_3 gleitungslos auf den beiden Evoluten p_1' und p_2' ab, während der Stab S_4 in A_2 gelenkig mit S_2 verbunden ist und ständig durch den im System S_3 festen Berührungspunkt von p_1 und p_2 hindurchgeht.⁸

Von dem zu diesem Mechanismus gehörigen Polplan fällt der Drehpol 12 in den Berührungspunkt von p_1 und p_2 , der Drehpol 13 in den Berührungspunkt von p_1' und S_3 , der Drehpol 23 in den Berührungspunkt von p_2' und S_3 , ferner ist der Punkt A_2 zugleich Drehpol 24. Da S_4 sich ständig auf den mit 12 sich deckenden festen Punkt des Systems S_3 stützt, so erhält man den Drehpol 34 im Schnittpunkt der in 12 auf S_4 errichteten Normalen mit der Polgeraden 23—24. Der Drehpol 14, der sich mit Hilfe der Polgeraden 12—24 und 13—34 ergibt, ist dann der Krümmungsmittelpunkt für die eben von A_2 durchlaufene Stelle der Bahnkurve a_1 . Damit ist die Savarysche Konstruktion, mit deren Hilfe man die Krümmungsmittelpunkte der Bahnkurven konstruieren kann, falls die Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen bereits bekannt sind, ohne Heranziehung von Grenzübergängen auf einfache Weise nachgewiesen.

⁶ Im Interesse einer einfacheren Ausdrucksweise sei es in der Folge gestattet, einen Stab als Repräsentanten des ebenen Systems S_i ebenfalls mit S_i zu bezeichnen.

⁷ Eine Aufzählung anderer Verfahren zur Ermittlung der Krümmungsmittelpunkte von Bahnkurven enthält K. Federhofer: Graphische Kinematik und Kinetostatik, S. 7f., Berlin, 1932, der auch selbst ein eigenes kinematisches Verfahren entwickelt hat: K. Federhofer: Zur Konstruktion der Krümmungsmittelpunkte ebener Kurven. S.-B. Akad. Wiss. Wien, math.-nat. Kl., Abt. IIa 135, 79—92 (1926).

⁸ Von jedem solchen bloß gedachten „Krümmungsmechanismus“ können zur besseren Veranschaulichung der gegenseitigen Bewegungen der vorkommenden Systeme auch leicht Modelle angefertigt werden in der Art desjenigen, das bei J. Krames: Zur Konstruktion der Krümmungskreise von ebenen und sphärischen Radlinien, Getriebetechnik (Reuleaux-Mitt.) 10, 481 (1942), in Bild 2 dargestellt ist.

Für die Punkte der Polbahnnormalen versagt diese Konstruktion, da alle Polgeraden zusammenfallen. Es läßt sich aber zeigen, daß man jede solche ausgeartete Polfigur auf unendlich viele Arten durch eine mit ihr „kinematisch gleichwertige“, nicht ausgeartete Polfigur ersetzen kann. Damit lassen sich dann auch ausgeartete Drehpolpläne konstruktiv auswerten und das hier gezeigte kinematische Prinzip zur Konstruktion von Krümmungskreisen bleibt dadurch ausnahmslos anwendbar.⁹

Für den Fall, daß die Polbahnen p_1 und p_2 Kreise sind, hat schon J. Krames¹⁰ einen Mechanismus angegeben, bei dem sich durch Vervollständigen der Polkonfiguration der Krümmungsmittelpunkt einer Radlinie (Trochoide) förmlich von selbst ergibt. Diese einfache und elegante Her-

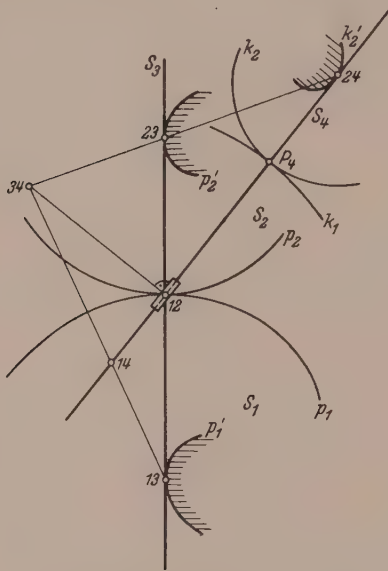


Abb. 7. Krümmungskreiskonstruktion für eine Hüllbahn bei gegebenen Polbahnen mittels der Polfigur eines Krümmungsmechanismus.

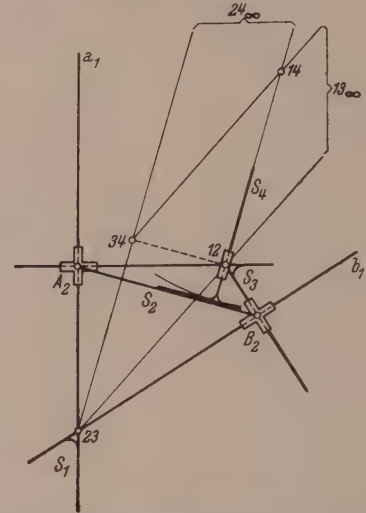


Abb. 8. Krümmungsermittlung für die Hüllbahn einer Geraden bei der Ellipsenbewegung.

leitung der Krümmungskreiskonstruktion einer Radlinie ließ vermuten, daß der dabei benützte kinematische Grundgedanke und das zu seiner zeichnerischen Durchführung erforderliche Konstruieren der aus den relativen Drehpolen bestehenden Polkonfiguration, nicht nur in diesem besonderen Fall, sondern überhaupt das angemessene Werkzeug für die zeichnerische Ermittlung der Kurvenkrümmung darstellt.

Ist eine punktweise Erzeugung der Kurve c_1 gegeben und wird hierbei c_1 im System S_1 als die Bahnkurve des dem System S_2 angehörenden Punktes C_2 betrachtet, so geht die Normale von c_1 in dem sich augenblicklich mit C_2 deckenden Punkt jeweils durch den Drehpol 12. Sind dabei die Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen p_1 und p_2 nicht bekannt, so stelle man — um nun zu einer Krümmungskreiskonstruktion für die Kurve c_1 zu gelangen — durch Hinzunahme der weiteren Glieder $S_3, S_4 \dots, S_{m-1}$ ein Getriebe her, das in jeder Lage den Drehpol 12 mechanisch erzeugt. Der Stab S_m , der sich ständig auf den Drehpol 12 stützt und im Punkt $C_2 = 2m$ drehbar

⁹ Siehe diesbezüglich A. Reuschel: Konstruktion des Drehpolplanes einer Zwanglaufkette beim Zusammenfallen von Polgeraden mittels einer kinematisch äquivalenten Polfigur. Anwendung auf Krümmungsmechanismen, insbesondere zur Ermittlung der Scheitelkrümmung von Radlinien. Österr. Ingenieur-Arch. (im Druck).

¹⁰ J. Krames: Darstellende und kinematische Geometrie für Maschinenbauer, S. 187f. Wien. 1947. — J. Krames: Zur Konstruktion der Krümmungskreise von ebenen und sphärischen Radlinien. Getriebetechnik (Reuleaux-Mitt.) 10, 481 (1942).

an das System S_2 angeschlossen ist, rollt dann auf der Evolute c_1' der gegebenen Kurve c_1 ohne zu gleiten ab. Der Drehpol 1 m fällt daher in den jeweiligen Berührungspunkt des Stabes S_m mit der Evolute c_1' und ist somit der Krümmungsmittelpunkt für die in diesem Augenblick von C_2 durchlaufene Bahnstelle der Kurve c_1 .

Darüber hinaus genügt es aber für die Ermittlung der Krümmungskreise schon, wenn man ein Zwanglaufgetriebe $S_1, S_2 \dots S_n$ angeben kann, in welchem eine Gerade von S_n ständig auf der Evolute c_1' der im System S_1 gegebenen Kurve c_1 gleitet. Den Krümmungsmittelpunkt erhält man sodann als Fußpunkt des Lotes, das aus dem jeweiligen Drehpol 1 n auf die entsprechende Gerade gefällt werden kann.

b) Soll nun der Krümmungskreis für die Hüllbahn k_1 der in S_2 liegenden Kurve k_2 gefunden werden (Abb. 7), so verwende man einen Mechanismus, welcher aus der die Evolute p_1' enthaltenden Systemebene S_1 und der mit den Evoluten p_2' und k_2' versehenen Systemebene S_2 sowie aus dem auf p_1' und p_2' gleitungslos rollenden Stab S_3 und dem Stab S_4 besteht, der auf der Evolute k_2' ebenfalls gleitungslos abrollt und dabei ständig durch denjenigen festen Punkt von S_3 hindurchgeht, der sich dauernd mit der jeweiligen Berührungsstelle von p_1 und p_2 deckt. Der Drehpolplan kann nun ebenso wie in Abb. 6 vervollständigt werden. Damit ist auch die Konstruktion der Hüllbahnkrümmungskreise ohne Verwendung von Grenzübergängen auf kurzem Weg hergeleitet worden.¹¹

Ein Vergleich der Abb. 6 und 7 liefert unmittelbar den

Satz 7 a: Der Krümmungsmittelpunkt der zu einer Systemkurve gehörigen Hüllbahn für ihren augenblicklichen Berührungspunkt ist zugleich auch der Krümmungsmittelpunkt derjenigen Bahnkurve, die von dem zum Berührungspunkt gehörigen Krümmungsmittelpunkt der Systemkurve beschrieben wird.

Eine andere Fassung davon ist der

Satz 7 b: Von zwei zusammengehörigen Krümmungsmittelpunkten eines Hüllkurvenpaares zweier ebenbewegter Systeme ist jeder zugleich der Krümmungsmittelpunkt der vom anderen durchlaufenen Bahnkurve.¹²

Sind die Polbahnen nicht gegeben, so braucht man zunächst wieder ein Getriebe das den Drehpol 12 mechanisch herstellt. Sollen beispielsweise die Krümmungskreise der Hüllbahn einer Geraden S_2 ermittelt werden (Abb. 8), deren Punkte A_2 und B_2 auf den Geraden a_1 bzw. b_1 des Systems S_1 gleiten, so fällt der Scheitel des festen Winkels S_3 , dessen Schenkel sich ständig auf die Punkte A_2 und B_2 stützen und dabei zu a_1 bzw. b_1 normal bleiben, immer mit dem Drehpol 12 zusammen. Demnach liegt der Drehpol 23 im Schnittpunkt von a_1 und b_1 und der Drehpol 13 im Fernpunkt der Polgeraden 12—23, da die gegenseitige Bewegung der Systeme S_1 und S_3 eine Schiebung ist.

Wir nehmen noch den rechten Winkel S_4 hinzu, von dem ein Schenkel auf dem Stab S_2 gleitet, während der andere Schenkel sich auf den Punkt 12 stützt. Der Drehpol 24 ist dann der Fernpunkt der zu S_2 normalen Richtung. Der Drehpol 34

¹¹ Diese Konstruktion wird in der Theorie der Wälzhebel verwertet. Sie wird auch zur Ermittlung richtig zusammenarbeitender Zahnprofile verwendet. Siehe diesbezüglich W. Hartmann: Die Maschinengetriebe, Bd. I, S. 218. Stuttgart und Berlin. 1913. — R. Beyer: Technische Kinematik, S. 294. Leipzig. 1931.

¹² A. Schoenflies: Geometrie der Bewegung, S. 40—42. Leipzig. 1886. — G. Koenigs: Leçons de cinématique, S. 144—147. Paris. 1897. (Analytischer Beweis.) — Th. Pöschl: Einführung in die ebene Getriebelehre, S. 73f. Berlin. 1932.

ergibt sich hierauf als Schnittpunkt der Polgeraden $23\text{---}24\infty$ mit der im Punkt 12 errichteten Normalen zu dem sich auf ihn stützenden Schenkel des rechten Winkels S_4 . Da die Schenkel dieses Winkels sich in jeder Lage mit der Tangente und Normalen der Hüllbahn des Stabes S_2 decken, so ist der Drehpol 14, den man mittels der Polgeraden $12\text{---}24\infty$ und $13\infty\text{---}34$ erhält, bereits der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Das in dieser Arbeit aufgestellte Konstruktionsprinzip und insbesondere das Auffinden von Mechanismen, die zu Krümmungskreis Konstruktionen führen, soll nun an einigen Beispielen von geometrisch und technisch wichtigen Kurven erläutert werden.¹³

6. Die Krümmung der Kegelschnitte.

a) Bewegen sich die beiden festen Punkte A_2 und B_2 des Stabes S_2 auf den Schenkeln a_1 bzw. b_1 eines im System S_1 liegenden rechten Winkels mit dem Scheitel M_1

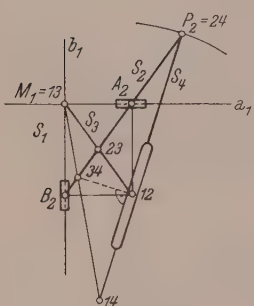


Abb. 9. Eine Krümmungsermittlung für die Ellipse auf Grund ihrer Papierstreifenkonstruktion.

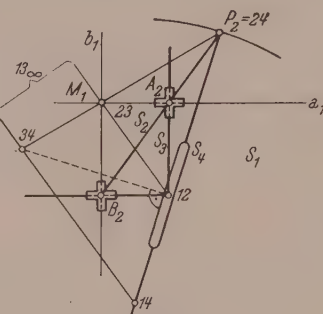


Abb. 10. Eine andere, auf die Papierstreifenkonstruktion einer Ellipse beruhende Ermittlung ihrer Krümmungsmittelpunkte.

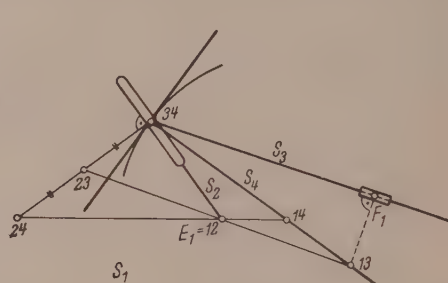


Abb. 11. Eine Krümmungsbestimmung der Ellipse, gegründet auf die Beziehung ihrer Normalen zu den Leitstrahlen.

(Abb. 9), so beschreibt jeder weitere Punkt P_2 der mit dem Stabe S_2 fest verbundenen Ebene in S_1 eine Ellipse (Papierstreifenkonstruktion). Wie leicht zu ersehen, ist dabei der Drehpol 12 ständig Endpunkt einer um den Punkt $M_1 = 13$ gegen S_1 drehbaren Kurbel S_3 , die überdies mit S_2 im Mittelpunkt 23 der Strecke $A_2 B_2$ gelenkig verbunden ist.

Fügt man in $P_2 = 24$ noch den Stab S_4 drehbar an den Stab S_2 an, der sich ständig auf den sich mit 12 deckenden festen Punkt von S_3 stützt, so ergibt sich der Drehpol 34 als Schnittpunkt der in 12 auf S_4 errichteten Normalen mit der Polgeraden $23\text{---}24$. Da der Stab S_4 in jedem Augenblick der Bewegung mit der Kurvennormalen in dem jeweils sich mit P_2 deckenden Ellipsenpunkt zusammenfällt, so ist der Drehpol 14 zugleich der zugehörige Krümmungsmittelpunkt der Ellipse.

Beachtet man, daß die Polbahnen der Ellipsenbewegung Kreise mit den Mittelpunkten 13 und 23 sind, so erkennt man, daß dieser Mechanismus auf die Savarysche Konstruktion führt.

b) Es gibt aber auch noch andere Mechanismen, die dasselbe leisten wie das eben beschriebene Getriebe und die im allgemeinen zu anderen Konstruktionen führen.

Stellt man den Drehpol 12 (anstatt mittels einer Kurbel) durch einen festen rechten Winkel S_3 mechanisch her (Abb. 10), der seinen Scheitel in 12 hat und dessen

¹³ Wegen weiterer Anwendungen dieses Konstruktionsprinzips sei verwiesen auf die demnächst erscheinenden Arbeiten „Tangentenkonstruktion für die Eingriffslinie eines Stirnräderpaares“ und „Krümmungskreis Konstruktionen von geometrisch und technisch wichtigen ebenen Kurven auf Grund eines einheitlichen kinematischen Konstruktionsprinzips“.

Schenkel sich auf die Punkte A_2 und B_2 stützen und ständig zu b_1 bzw. a_1 parallel bleiben, so erhält man eine andere Krümmungsmittelpunktskonstruktion für die Ellipse. Der Drehpol 23 fällt in den Punkt M_1 . Da die gegenseitige Bewegung der Systeme S_1 und S_3 eine Schiebung ist, so liegt der Drehpol 13 im Fernpunkt der Polgeraden 12—23. Die Drehpole 34 und 14 ergeben sich nun auf die gleiche Weise wie vorhin.

c) Will man auf die Tatsache, daß die Tangenten und Normalen der Kegelschnitte den Winkel der Leitstrahlen halbieren, eine Krümmungsmittelpunktskonstruktion für die Ellipse (oder Hyperbel) gründen, so denken wir uns ein Getriebe, das aus der Zeichenebene S_1 und drei Stäben S_2 , S_3 und S_4 besteht, die in jeder Stellung des Getriebes die Lage der beiden Leitstrahlen und der Kurvennormalen einnehmen. Dabei läßt sich die bewegliche Verbindung der einzel-

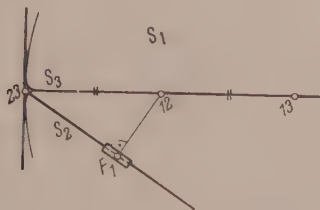


Abb. 12. Eine Krümmungsbestimmung der Parabel auf Grund der Beziehung ihrer Normalen zu den Leitstrahlen.

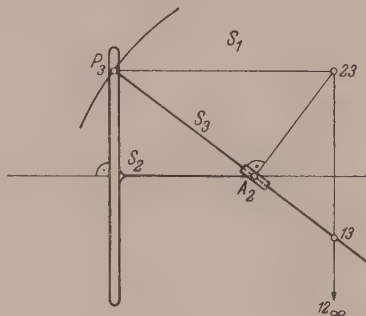


Abb. 13. Eine Krümmungskonstruktion für die Parabel, hergeleitet aus der konstanten Länge ihrer Subnormalen.

nen Stäbe untereinander und mit dem ruhenden System noch in verschiedener Weise ausführen und jede solche Anschlußart führt im allgemeinen zu einer anderen Konstruktion.

In Abb. 11 stützt sich der Stab S_3 (Leitstrahl) ständig auf den Punkt F_1 (Brennpunkt) des Systems S_1 und ist mit dem Stab S_4 (Kurvennormale) durch den Zapfen 34 gelenkig verbunden, während sich der Stab S_2 (Leitstrahl) gegen S_1 um das Gelenk $E_1 = 12$ (Brennpunkt) dreht und sich stets auf den Gelenkpunkt 34 stützt.

Der Drehpol 13 ist also der Schnittpunkt der Kurvennormalen S_4 mit dem in F_1 auf S_3 errichteten Lot. Der Drehpol 23 ergibt sich dann im Schnitt des Polstrahls 12—13 mit der Geraden, die in 34 auf S_2 normal steht. Wird das Gelenk 34 so geführt, daß es den Kegelschnitt beschreibt, so bewegen sich dabei S_2 und S_3 gegen S_4 in jedem Augenblick mit entgegengesetzt gleichen Winkelgeschwindigkeiten: $\omega_{34} = -\omega_{24}$. Bei der Konstruktion des Drehpols 24 muß daher beachtet werden, daß zufolge Satz 3 der Drehpol 23 der Mittelpunkt der Strecke 24—34 sein muß. Der Drehpol 14, der sich mit Hilfe der Polstrahlen 12—24 und 13—34 ergibt, ist dann zugleich Krümmungsmittelpunkt für den sich mit dem Gelenk 34 deckenden Punkt des Kegelschnitts.

d) Im Falle der Parabel genügt es, den Stab S_2 (Leitstrahl) mit dem Scheitel des rechten Winkels S_3 (Tangente und Normale) gelenkig zu verbinden (Abb. 12). Wird das Gelenk 23 dieses Mechanismus längs der Parabel geführt, so daß S_2 stets mit dem durch den Brennpunkt F_1 gehenden Leitstrahl und S_3 mit dem aus Tangente und Normale gebildeten rechten Winkel zusammenfällt, so ist immer $\omega_{23} = \omega_{31} = -\omega_{13}$. Nach Satz 3 muß daher der Drehpol 12, der sich als Schnittpunkt des im Punkt F_1 auf S_2 errichteten Lotes mit der Parabelnormalen ergibt, in der Mitte von 13 und 23 liegen. Damit läßt sich der Krümmungsmittelpunkt 13 für den mit 23 zusammenfallenden Parabelpunkt konstruieren.

Für den Parabelscheitel liefert dies die bekannte Konstruktion des Scheitelkrümmungskreises.

e) Geht man von einer Tangenten- oder Normaleneigenschaft einer Kurve aus, so ist die Kurvennormale bereits gegeben. Man gelangt daher auf diese Weise zu einem einfacheren Krümmungsmechanismus und damit zu einer einfacheren Krümmungskreiskonstruktion, als wenn man diese auf einer punktweisen Erzeugung der Kurve aufbaut.

In Abb. 13 wurde eine Krümmungskreiskonstruktion für die Parabel auf Grund der Eigenschaft hergeleitet, daß die Subnormale konstant ist.

Der rechte Winkel S_2 , der mit einem Schenkel längs der Parabelachse gleitet, trägt auf diesem eine drehbare Hülse, deren Drehpunkt A_2 vom Winkelscheitel um die Länge der Subnormalen entfernt ist. Der Stab S_3 geht stets durch diese Hülse,

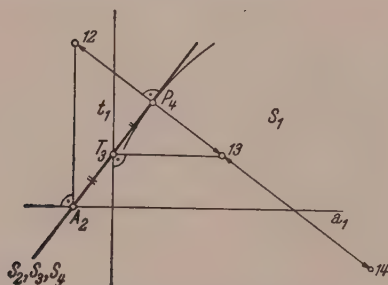


Abb. 14. Eine Krümmungskonstruktion der Parabel auf Grund der Eigenschaft, daß die vom Berührungspunkt und der Achse begrenzten Tangentenstrecken durch die Scheiteltangente halbiert werden.

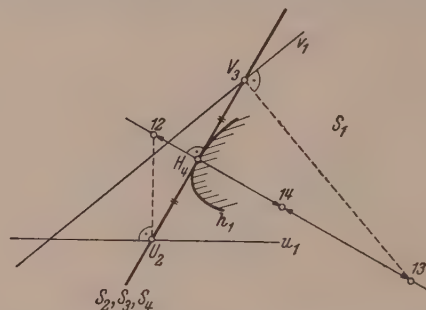


Abb. 15. Eine Krümmungsmittelpunktskonstruktion der Hyperbel auf Grund der Eigenschaft, daß die von den Asymptoten begrenzten Tangentenstrecken durch den Berührungspunkt halbiert werden.

während einer seiner Punkte (P_3) sich auf dem anderen Schenkel von S_2 bewegt und dabei in S_1 die Parabel beschreibt.

Da S_2 sich gegen S_1 entlang der Parabelachse verschiebt, so ist der Drehpol 12 der Fernpunkt der zur Parabelachse normalen Richtung. Der Drehpol 23 ergibt sich im Schnittpunkt des in A_2 auf den Stab S_3 errichteten Lotes mit der Geraden, die man durch P_3 senkrecht zum achsennormalen Schenkel des rechten Winkels S_2 ziehen kann. Da der Stab S_3 ständig mit der Kurvennormalen für den jeweils sich mit P_3 deckenden Parabelpunkt zusammenfällt, so ist der Drehpol 13 der zugehörige Krümmungsmittelpunkt.

f) Auch auf die Eigenschaft, daß auf jeder Parabeltangente die vom Berührungspunkt und von der Achse begrenzte Strecke durch die Scheiteltangente halbiert wird, kann man eine Krümmungsmittelpunktskonstruktion der Parabel gründen.

Diese Eigenschaft können wir dadurch kinematisch auswerten, daß wir uns die Parabeltangente von drei Stäben S_2 , S_3 und S_4 überlagert denken (Abb. 14), die alle drei auf der Parabel gleiten (wälzen), und zwar so, daß dabei im System S_1 der Punkt A_2 des Stabes S_2 die Parabelachse a_1 , der Punkt T_3 des Stabes S_3 die Scheiteltangente t_1 und der Punkt P_4 des Stabes S_4 die Parabel beschreibt.

Die Drehpole 12, 13 und 14 liegen auf der durch P_4 gehenden Kurvennormalen, und zwar ergibt sich 12 im Schnitt mit dem in A_2 auf die Parabelachse errichteten Lot und 13 im Schnitt mit der durch T_3 gehenden Normalen zur Scheiteltangente. Da die Schiebungsgeschwindigkeiten v_{23} und v_{43} dauernd entgegengesetzt gleich sind, so liegt nach Satz 5 der Drehpol 13 im Mittelpunkt der Strecke 12—14. Damit findet man den Krümmungsmittelpunkt 14 für die sich mit P_4 deckende Parabelstelle.

g) Um für die Hyperbel zu einer Krümmungsmittelpunktskonstruktion zu gelangen, gehen wir von der bekannten Eigenschaft aus, daß auf jeder Tangente das Stück zwischen den Asymptoten durch den Berührungspunkt halbiert wird. Diese Eigenschaft können wir wieder kinematisch auswerten, wenn wir uns die Hyperbeltangente von drei Stäben S_2 , S_3 und S_4 überlagert denken (Abb. 15), die alle drei auf der Hyperbel gleiten, und zwar soll im System S_1 der Punkt U_2 des Stabes S_2 die Asymptote u_1 , der Punkt V_3 des Stabes S_3 die Asymptote v_1 und der Punkt H_4 des Stabes S_4 die Hyperbel h_1 beschreiben.

Da die Schiebungsgeschwindigkeiten v_{24} und v_{34} dauernd entgegengesetzt gleich sind, so liegt der Krümmungsmittelpunkt 14 der Hyperbel nach Satz 5 im Halbierungspunkt der Strecke 12—13.¹⁴

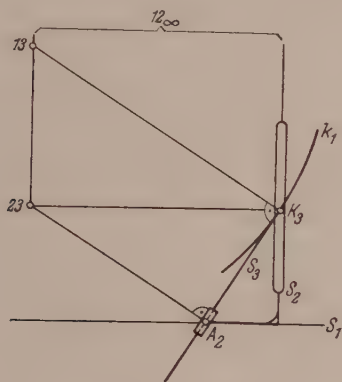


Abb. 16. Eine Krümmungskonstruktion der Exponentialkurve, gegründet auf die unveränderliche Länge ihrer Subtangenten.

Für einen Scheitel der Hyperbel erhält man auf diese Weise die bekannte Scheitelkrümmungskreisconstruction.

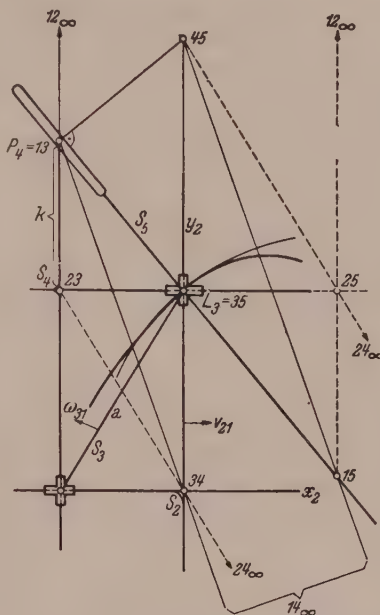


Abb. 17. Zwei Krümmungskonstruktionen der Sinuslinie auf Grund ihrer Entstehung als Bahnkurve des einen Endes des Stabes S_3 , der um das auf einer Geraden sich gleichförmig bewegend andere Stabende eine gleichförmige Drehung vollführt (Schwingungskurve einer harmonischen Schwingung).

7. Krümmung der Exponentialkurven und logarithmischen Kurven.

Da für eine Exponentialkurve die Subtangente unveränderlich ist, benützen wir einen rechten Winkel S_2 , auf dessen einem Schenkel die feste Subtangentenstrecke vom Scheitel aus abgetragen ist und der sich mit diesem Schenkel entlang der Schiene S_1 (Abszissenachse) verschieben läßt (Abb. 16). Denkt man sich einen Stab S_3 so geführt, daß er ständig durch den Endpunkt A_2 der Subtangentenstrecke hindurchgeht, während ein fester Punkt K_3 von S_3 auf dem anderen Schenkel von S_2 und zugleich auf der Exponentialkurve k_1 gleitet, so ist der Drehpol 13 der Krümmungsmittelpunkt für die Exponentialkurve. Damit ist auch eine Krümmungskonstruktion für die logarithmische Kurve gefunden.

Von der zugehörigen Polfigur liegt der Drehpol 12 im Fernpunkt der zur Schiene S_1 normalen Richtung. Der Drehpol 23 ist der Schnittpunkt der durch A_2 senkrecht

¹⁴ L. Burmester: Lehrbuch der Kinematik, Bd. I, S. 96, Leipzig, 1888, und A. Mannheim: Principes et développements de géométrie cinématique, S. 21, Paris, 1894, gelangen auf andere Weise zur gleichen Konstruktion.

zu S_3 verlaufenden Geraden mit dem Lot, das in K_3 auf dem zur Gleitschiene normalen Schenkel des rechten Winkels S_2 errichtet werden kann. Schließlich ergibt sich 13 im Schnitt der Polgeraden $12\infty-23$ mit der durch K_3 gehenden Kurvennormalen.¹⁵

8. Krümmung der Sinuslinie.

Wird ein rechter Winkel S_2 mit den Schenkeln x_2 und y_2 in Richtung des Schenkels x_2 gegen das ruhende System S_1 verschoben (Abb. 17) und bewegen sich gleichzeitig die Endpunkte eines Stabes S_3 von der Länge a auf den Schenkeln von S_2 , wobei diese Bewegungen mit einem konstanten Geschwindigkeitsverhältnis $v_{21} : \omega_{31} = k$ erfolgen, so beschreibt der auf dem Schenkel y_2 laufende Punkt L_3 des Systems S_3 in S_1 die Schwingungskurve einer harmonischen Schwingung von der Amplitude a (Sinuslinie).

Die Wegstrecke w , die der rechte Winkel S_2 im System S_1 zurücklegt, während S_3 eine volle Umdrehung ausführt, ist die Wellenlänge. Ist $w = 2a\pi$ oder $k = \frac{w}{2\pi} = a$, so beschreibt L_3 eine gewöhnliche Sinuslinie.

Die Drehpole 13 und 23 haben dann nach Satz 4 in jedem Augenblick die feste Entfernung k . Damit kann man mit Hilfe des bekannten Drehpols 23 den Drehpol 13 und somit auch die Tangente und Normale der Sinuslinie konstruieren.

Nehmen wir noch einen rechten Winkel S_4 hinzu, dessen Schenkel sich stets auf die Endpunkte des Stabes S_3 stützen und zu den Schenkeln von S_2 ständig parallel bleiben, so deckt sich der Punkt P_4 des Systems S_4 , der auf dem zu y_2 parallelen Schenkel liegt und vom Scheitel des rechten Winkels S_4 den Abstand k hat, stets mit dem jeweiligen Drehpol 13, der auf diese Weise mechanisch erzeugt wird.

Der Stab S_5 , der mit S_3 durch das Gelenk $L_3 = 35$ verbunden ist und sich immer auf den Punkt P_4 stützt, bewegt sich dann so, daß der auf ihm gelegene Punkt 35 in S_1 die Sinuslinie beschreibt und daß dabei S_5 stets mit der zugehörigen Kurvennormalen zusammenfällt. Daher ist der Drehpol 15 zugleich Krümmungsmittelpunkt für die Sinuslinie.

Von den weiteren Drehpolen, die zu diesem Mechanismus gehören, liegen 34 und 35 unmittelbar gegeben vor. Der Drehpol 45 ergibt sich sodann im Schnitt der Polgeraden 34—35 mit der in P_4 auf dem Stab S_5 errichteten Senkrechten. Da die Relativbewegung des Systems S_4 gegen das System S_1 eine Schiebung ist, so liegt 14 im Fernpunkt der Polgeraden 13—34. Schließlich findet man den Krümmungsmittelpunkt 15 mit Hilfe der Polgeraden 13—35 und $14\infty-45$.

Zu einer anderen Krümmungsmittelpunktskonstruktion gelangt man, wenn man wie vorhin zunächst wieder die Drehpole 12 ∞ , 23, 13, 34, 35 und 45 bestimmt. Sodann ermittelt man den Drehpol 24, der im Fernpunkt der Polgeraden 23—34 liegt, da auch die gegenseitige Bewegung von S_2 und S_4 eine Schiebung ist. Hierauf findet man 25 mittels der Polgeraden 23—35 und $24\infty-45$ und schließlich den Krümmungsmittelpunkt 15 mit Hilfe der Polgeraden $12\infty-25$ und 13—35. Diese zweite Konstruktion ist in Abb. 17 gestrichelt eingezeichnet.

9. Zusammenfassung.

Das hier entwickelte allgemeine Konstruktionsprinzip zur Bestimmung der Krümmung gilt, wie die vorangegangenen Ausführungen gezeigt haben, für alle Kurven, die bei der zwangsläufigen Bewegung von beliebigen ebenen Systemen entstehen.

Es gestattet mit Hilfe von einigen wenigen geometrisch-kinematischen Grund-

¹⁵ H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, S. 283f. (Sammlung Schubert, Bd. LVI), Leipzig, 1908, kommt auf analytischem Wege zur gleichen Konstruktion.

gedanken eine anschauliche und einfache Herleitung von Konstruktionen für die Krümmungskreise von ebenen Kurven. Die dieser gedanklichen Einfachheit entspringende Überlegenheit dieses Verfahrens gegenüber anderen tritt besonders auffällig bei schwierigeren Fragestellungen, wie z. B. bei der Krümmungsermittlung von Polbahnen, hervor.¹⁶

(Eingegangen am 2. Mai 1947.)

Kreiselwirkung bei Schwungradschwingungen.

Von G. Heinrich, Wien.

Mit 1 Textabbildung.

Zusammenfassung. Führt ein Schwungrad durch elastische Deformation der Speichen Schwingungen senkrecht zur Radebene aus, so macht sich eine Kreiselwirkung bemerkbar. Sie kann mittels der Eulerschen Kreiselgleichungen untersucht werden. Es wird gezeigt, daß es ein ausgezeichnetes, im Sinne der Schwungradrotation gleichförmig rotierendes Koordinatensystem gibt, von dem aus beurteilt die Schwingung mit einer einzigen Frequenz erfolgt. In bezug auf jedes andere drehende oder nicht drehende Koordinatensystem erhält man zwei verschiedene Frequenzen. Im allgemeinen rotiert das ausgezeichnete System etwas langsamer als das Schwungrad selbst, nur wenn das Rad als plattenförmiger Körper angesehen werden kann, stimmen beide Drehzahlen überein.

Summary. If, as a result of elastic deformation of the spokes, the ring of a flywheel is oscillating normally to its plane, a gyro effect takes place which can be investigated with the Eulerian gyro equations. This investigation shows that there exists a conspicuous system of coordinates, rotating uniformly in the same direction as the flywheel. With reference to this system, the oscillation has only one frequency; referring to any other system, whether rotating or not, there are two different frequencies. In general, the conspicuous system of coordinates is rotating a little slower than the flywheel itself. The two angular speeds will be the same only in the case where the flywheel reduces to a flat plate.

Résumé. Si, par suite d'une déformation élastique des rayons, l'anneau d'un volant oscille perpendiculairement à son propre plan, il se produit un effet gyroscopique qui peut être étudié à l'aide des équations gyroscopiques d'Euler. L'auteur démontre qu'il existe un système de coordonnées caractéristique, en rotation uniforme et dans la même direction que le volant. Par rapport à ce système, l'oscillation ne possède qu'une seule fréquence, alors que, par rapport à n'importe quel autre système, rotatif ou non, il existe deux fréquences différentes. En général, le système caractéristique de coordonnées tourne un peu plus lentement que le volant lui-même. Les deux vitesses angulaires deviennent seulement les mêmes dans le cas où le volant se réduit à une plaque plane.

Wenn ein Schwungrad senkrecht zu seiner Radebene Schwingungen ausführt, so ergeben sich Bewegungsverhältnisse, bei denen das Schwungrad gezwungen wird, „als Kreisel“ zu reagieren. In welcher Weise sich dies auf die Ausgestaltung der Eigenschwingung auswirkt, soll im folgenden untersucht werden.

Auf einer als starr angenommenen Welle sei ein Schwungrad aufgekeilt, das bei elastischer Deformation der Speichen, durch die der Radkranz quer zur Radebene um einen kleinen Winkel ϑ verdreht wird, kleine Schwingungen ausführt. Zur Vereinfachung werde der Radkranz als starr und als alleiniger Massenträger angesehen. Welches ist nun die allgemeinste Form der Eigenschwingung, die ein solches System ausführen kann, wenn auf das Schwungrad selbst kein resultierendes Drehmoment einwirkt?

Timoshenko,¹ der solche Schwungradschwingungen behandelt, betrachtet zunächst ein starres Schwungrad auf biegsamer Welle und spezialisiert das Problem

¹⁶ Siehe A. Reuschel: Konstruktion von Tangenten und Krümmungskreisen der Polbahnen ebenbewegter Systeme. (Erscheint demnächst in dieser Zeitschrift.)

¹ S. Timoshenko: Schwingungsprobleme der Technik, S. 188. Berlin: Springer-Verlag. 1932.

Welle fällt in die Richtung z_1 , welche die Ebenen E_0 und E im gemeinsamen Schwungradmittelpunkt O schneidet. Die Schnittlinie der beiden Ebenen (Knotenlinie) ist zugleich die Gerade, in der der Vektor des resultierenden Drehmomentes der elastischen Kräfte, die auf den Kranz wirken, zu liegen kommt. Außer diesen sollen nach Voraussetzung keine physikalischen Kräfte auf den Kranz wirken. (Von der Schwerkraft und von Dämpfungskräften wird abgesehen.) Die Lage der Ebene E wird in üblicher Weise durch die drei Eulerschen Winkel ψ , φ und ϑ in bezug auf die ruhend gedachte Ebene E_0 festgelegt. Das raumfeste (ruhende) Koordinatensystem sei durch die Achsen x_1 , y_1 , z_1 , das körperfeste (mit dem Kranz verbundene) durch die Achsen x , y , z (Hauptträgheitsachsen) gekennzeichnet. Sind $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$ und $\dot{\vartheta}$ die zu den Eulerschen Winkeln gehörigen Winkelgeschwindigkeiten und p , q , r die Komponenten des momentanen Winkelgeschwindigkeitsvektors des Kranzes in bezug auf die Achsen x , y , z , so gelten, da man den momentanen Winkelgeschwindigkeitsvektor auch aus den schiefwinkligen Komponenten ψ , $\dot{\varphi}$ und $\dot{\vartheta}$ zusammensetzen kann, die folgenden bekannten Relationen:

$$\left. \begin{aligned} p &= \dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cdot \sin \varphi, \\ q &= -\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Eulerschen Gleichungen der Dynamik des starren Körpers lauten:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= A \cdot \dot{p} - (B - C) q \cdot r, \\ M_y &= B \cdot \dot{q} - (C - A) r \cdot p, \\ M_z &= C \cdot \dot{r} - (A - B) p \cdot q, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

wobei M_x , M_y und M_z die auf den Körpern wirkenden äußeren Momente und A , B , C die drei Hauptträgheitsmomente des Körpers bedeuten, deren Achseneinrichtungen mit x , y , z zusammenfallen.

Nimmt man die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes an, so läßt sich das Moment M der elastischen Kräfte, dessen Vektor in die Knotenlinie fällt, durch die Beziehung

$$M = -c \cdot \vartheta \quad (3)$$

ausdrücken. c heißt dann das Direktionsmoment und hängt von Größe, Anordnung und Material der Speichen ab; es wird im folgenden als bekannt vorausgesetzt. Das negative Vorzeichen in (3) erklärt sich daraus, daß das Moment bestrebt ist, den Winkel ϑ zu verkleinern.

Durch Projektion von M auf die Achsen x , y , z erhält man:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -c \cdot \vartheta \cdot \cos \varphi, \\ M_y &= c \cdot \vartheta \cdot \sin \varphi, \\ M_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Da nur Schwingungen quer zur Schwungradebene betrachtet werden sollen, muß die Projektion des jeweiligen Winkelgeschwindigkeitsvektors des Kranzes in die Richtung der Wellenachse (z_1) mit der jeweiligen Winkelgeschwindigkeit ω der Welle übereinstimmen. Dies liefert die Beziehung:

$$\omega = \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta. \quad (5)$$

Differenziert man die Gl. (1) nach der Zeit, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} \dot{p} &= \ddot{\vartheta} \cos \varphi - \dot{\vartheta} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi + \ddot{\psi} \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + \dot{\psi} \cdot \dot{\vartheta} \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi + \dot{\psi} \cdot \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi, \\ \dot{q} &= -\ddot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\vartheta} \cdot \dot{\varphi} \cos \varphi + \ddot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi + \dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \dot{r} &= \ddot{\psi} \cos \vartheta - \dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \vartheta + \ddot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

Es sollen nun folgende einschränkende Voraussetzungen gemacht werden: 1. Zufolge der bei Schwungrädern vorhandenen Symmetrie ist das Trägheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid, es gilt also $A = B$. 2. Es werden nur kleine Schwingungen in Betracht gezogen; man kann also näherungsweise $\sin \vartheta = \vartheta$, $\cos \vartheta = 1$ und $\dot{\vartheta} \cdot \ddot{\vartheta} = 0$ setzen.

Führt man die Gl. (1a) und (4) in die Eulerschen Gleichungen (2) ein, so ergeben sich bei Benutzung der Voraussetzungen 1 und 2 die Beziehungen:

$$-c \cdot \dot{\vartheta} \cos \varphi = A (\ddot{\vartheta} \cos \varphi - \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \sin \varphi + \ddot{\psi} \vartheta \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \dot{\varphi} \vartheta \cos \varphi) + (C - A) (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) (-\dot{\vartheta} \sin \varphi + \dot{\psi} \vartheta \cos \varphi), \quad (6a)$$

$$c \cdot \dot{\vartheta} \sin \varphi = A (-\ddot{\vartheta} \sin \varphi - \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \cos \varphi + \ddot{\psi} \vartheta \cos \varphi + \dot{\psi} \dot{\vartheta} \cos \varphi - \dot{\psi} \dot{\varphi} \vartheta \sin \varphi) - (C - A) (\varphi + \dot{\psi}) (\dot{\vartheta} \cos \varphi + \dot{\psi} \vartheta \sin \varphi), \quad (6b)$$

$$0 = C (\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}). \quad (6c)$$

Aus (6c) folgt: $\dot{\varphi} + \dot{\psi} = \text{const.}$ und daraus durch Vergleichung mit (5) bei Beachtung von Voraussetzungen 2:

$$\omega = \dot{\varphi} + \dot{\psi} = \text{const.} \quad (7)$$

Die Welle läuft also mit konstanter Drehzahl, und die kleinen Schwingungen haben auf ihren Lauf keine Rückwirkung.

Multipliziert man Gl. (6a) mit $-\cos \varphi$ und addiert die mit $+\sin \varphi$ multiplizierte Gl. (6b), so erhält man bei Verwendung von (7) nach einfacher Reduktion:

$$\ddot{\vartheta} + \left(\frac{c}{A} + \frac{C\omega}{A} \dot{\psi} - \dot{\psi}^2 \right) \vartheta = 0. \quad (8)$$

Durch Multiplikation von (6a) mit $\sin \varphi$ und Addition der mit $\cos \varphi$ multiplizierten Gl. (6b) ergibt sich bei Beachtung von (7):

$$\ddot{\psi} \vartheta + 2 \dot{\psi} \dot{\vartheta} - \frac{C}{A} \omega \dot{\vartheta} = 0. \quad (9)$$

Nach Trennung der Variablen geht (9) über in: $\frac{2 d\dot{\vartheta}}{\dot{\vartheta}} + \frac{d\dot{\psi}}{\dot{\psi} - \frac{C}{2A}\omega} = 0$, und daraus folgt:

$$\vartheta^2 \left(\dot{\psi} - \frac{C}{2A} \omega \right) = C_1, \quad (10)$$

wobei C_1 eine Integrationskonstante bedeutet.

Eliminiert man aus (8) und (10) die Größe $\dot{\psi}$, so erhält man schließlich folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung für ϑ :

$$\ddot{\vartheta} + k^2 \vartheta - \frac{C_1^2}{\vartheta^3} = 0, \quad (11)$$

wobei zur Abkürzung:

$$\frac{c}{A} + \frac{C^2}{4A^2} \cdot \omega^2 = k^2 \quad (11a)$$

gesetzt wurde. Da ω konstant ist, ist auch k eine Konstante. Die einmalige Integration von (11) liefert:

$$\dot{\vartheta} = \frac{\sqrt{C_2 \vartheta^2 - k^2 \vartheta^4 - C_1^2}}{\vartheta} \quad (12)$$

mit C_2 als einer neuen Integrationskonstante.

Durch Einführung von zwei neuen Konstanten α und β an Stelle von C_1 und C_2 , die durch die Gleichungen

$$C_1 = k \sqrt{\alpha (\alpha + \beta)} \quad \text{und} \quad C_2 = k^2 (2\alpha + \beta) \quad (13)$$

verknüpft sind, erhält man als Lösung von (12) den einfachen Ausdruck:

$$\vartheta = \sqrt{\alpha + \beta \cos^2 (k t + \varepsilon)}, \quad (14)$$

wobei ε eine neue Integrationskonstante bedeutet.

Aus (10), (14) und (7) folgt schließlich bei Beachtung von (13)

$$\dot{\psi} = \frac{C}{2A} \omega + \frac{k \sqrt{\alpha (\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta \cos^2 (k t + \varepsilon)}, \quad (15)$$

$$\dot{\varphi} = \left(1 - \frac{C}{2A}\right) \omega - \frac{k \sqrt{\alpha (\alpha + \beta)}}{\alpha + \beta \cos^2 (k t + \varepsilon)}. \quad (16)$$

Die Gl. (14), (15) und (16) stellen bereits die grundsätzliche Lösung unseres Problems dar, doch sind die gewonnenen Formeln physikalisch nicht durchsichtig. Um zu einer klareren Anschauung zu kommen, soll eine Transformation auf ein neues Koordinatensystem mit den Achsen x_2, y_2, z_2 vorgenommen werden (s. die Abbildung). Die z_2 -Achse falle mit der früher benutzten z_1 -Achse zusammen, die auf der Ebene E_0 senkrecht steht. Die Achsen x_2 und y_2 liegen dann in der Ebene E_0 und sollen sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\lambda}$ gegenüber den ruhenden Achsen x_1 und y_1 drehen. Über die Größe von $\dot{\lambda}$ soll vorläufig noch nicht verfügt werden. Es sei ferner λ der veränderliche Winkel, den die x_2 -Achse mit der x_1 -Achse einschließt.

Sind p_2 und q_2 die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Kranzes in bezug auf die Achsen x_2 und y_2 , so bestehen nach der Abbildung die kinematischen Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \dot{\vartheta} \cos (\psi - \lambda) + \dot{\varphi} \sin \vartheta \cdot \sin (\psi - \lambda) \\ q_2 &= \dot{\vartheta} \sin (\psi - \lambda) - \dot{\varphi} \sin \vartheta \cdot \cos (\psi - \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

oder nach Voraussetzung 2:

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \dot{\vartheta} \cos (\psi - \lambda) + \dot{\varphi} \cdot \vartheta \cdot \sin (\psi - \lambda) \\ q_2 &= \dot{\vartheta} \sin (\psi - \lambda) - \dot{\varphi} \cdot \vartheta \cdot \cos (\psi - \lambda) \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

Aus der Integration von (15) folgt:

$$\psi = \frac{C}{2A} \omega t + \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \operatorname{tg} (k t + \varepsilon) \right] + \varepsilon_1, \quad (18)$$

mit ε_1 als neue Integrationskonstante.

Da $\dot{\lambda}$ als konstant vorausgesetzt wurde, kann man setzen:

$$\lambda = \dot{\lambda} t + \varepsilon_2 \quad (19)$$

mit der neuen Konstanten ε_2 .

Setzt man $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \varepsilon'$, so ergibt sich:

$$\psi - \lambda = \left[\left(\frac{C}{2A} \omega - \dot{\lambda} \right) t + \varepsilon' \right] + \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha + \beta}} \operatorname{tg} (k t + \varepsilon) \right]$$

und daraus nach trigonometrischen Umformungen:

$$\cos (\psi - \lambda) = \frac{\sqrt{\alpha + \beta} \cdot \cos \left[\left(\frac{C}{2A} \omega - \dot{\lambda} \right) t + \varepsilon' \right] \cdot \cos (k t + \varepsilon)}{\sqrt{\alpha + \beta \cos^2 (k t + \varepsilon)}} - \frac{\sqrt{\alpha} \cdot \sin \left[\left(\frac{C}{2A} \omega - \dot{\lambda} \right) t + \varepsilon' \right] \sin (k t + \varepsilon)}{\sqrt{\alpha + \beta \cos^2 (k t + \varepsilon)}}, \quad (20)$$

$$\sin (\psi - \lambda) = \frac{\sqrt{\alpha + \beta} \sin \left[\left(\frac{C}{2A} \omega - \dot{\lambda} \right) t + \varepsilon' \right] \cos (k t + \varepsilon)}{\sqrt{\alpha + \beta \cos^2 (k t + \varepsilon)}} + \frac{\sqrt{\alpha} \cdot \cos \left[\left(\frac{C}{2A} \omega - \dot{\lambda} \right) t + \varepsilon' \right] \sin (k t + \varepsilon)}{\sqrt{\alpha + \beta \cos^2 (k t + \varepsilon)}}. \quad (21)$$

Führt man (20) und (21) in (17a) ein, so erhält man bei Beachtung von (14) und (16) nach einigen elementaren Umformungen:

$$p_2 = A_1 \sin \left\{ \left[k + \left(\frac{C}{2A} \omega - \dot{\lambda} \right) t + \varepsilon^{(1)} \right] \right\} + A_2 \sin \left\{ \left[k - \left(\frac{C}{2A} \omega - \dot{\lambda} \right) t + \varepsilon^{(2)} \right] \right\}, \quad (22)$$

$$q_2 = -A_1 \cos \left\{ \left[k + \left(\frac{C}{2A} \omega - \dot{\lambda} \right) t + \varepsilon^{(1)} \right] \right\} + A_2 \cos \left\{ \left[k - \left(\frac{C}{2A} \omega - \dot{\lambda} \right) t + \varepsilon^{(2)} \right] \right\}, \quad (23)$$

wobei die neuen Konstanten $A_1, A_2, \varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$ mit den alten Größen durch die Relationen

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\sqrt{\alpha + \beta} + \sqrt{\alpha}}{2} \left[\left(1 - \frac{C}{2A} \right) \omega - k \right], \\ A_2 &= -\frac{\sqrt{\alpha + \beta} - \sqrt{\alpha}}{2} \left[\left(1 - \frac{C}{2A} \right) \omega + k \right], \\ \varepsilon^{(1)} &= \varepsilon + \varepsilon' \quad \text{und} \quad \varepsilon^{(2)} = \varepsilon - \varepsilon' \end{aligned}$$

zusammenhängen.

Die Gl. (22) und (23) ermöglichen eine Diskussion der sich ausbildenden Eigenschwingung. Zunächst erkennt man, daß sich die Schwingung vom Standpunkt eines mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\lambda}$ rotierenden Beobachters folgendermaßen beschreiben läßt: Um zwei aufeinander senkrechte Achsen, welche die Systemdrehung mitmachen, werden Schwingungen ausgeführt, die aus der Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit zwei verschiedenen Kreisfrequenzen bestehen. Die beiden Kreisfrequenzen ω_1 und ω_2 haben nach (22), (23) und (11a) die Größen:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c}{A} + \frac{C^2}{4A^2} \omega^2} + \frac{C}{2A} \omega - \dot{\lambda}, \quad (24)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c}{A} + \frac{C^2}{4A^2} \omega^2} - \frac{C}{2A} \omega + \dot{\lambda}. \quad (25)$$

Für einen ruhenden Beobachter ($\dot{\lambda} = 0$) erhält man also die beiden Frequenzen ω_{10} und ω_{20} zu:

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{c}{A} + \frac{C^2}{4A^2} \omega^2} + \frac{C}{2A} \omega, \quad (24a)$$

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{c}{A} + \frac{C^2}{4A^2} \omega^2} - \frac{C}{2A} \omega. \quad (25a)$$

Diese Werte stimmen mit den von Timoshenko berechneten Frequenzwerten überein; der eingangs erwähnte Unterschied zwischen dem von Timoshenko behandelten Fall und dem hier vorliegenden wirkt sich also, wie man sieht, bei kleinen Schwingungen nicht aus.

Man kann nun aber, um zu einer durchsichtigeren Darstellung zu gelangen, die Frage stellen, ob es nicht eine Winkelgeschwindigkeit $\dot{\lambda}^*$ gibt, bei welcher die beiden Frequenzen ω_1 und ω_2 nach (24) und (25) übereinstimmen. Durch Gleichsetzen von (24) und (25) erhält man das gesuchte $\dot{\lambda}^*$ zu:

$$\dot{\lambda}^* = \frac{C}{2A} \omega. \quad (26)$$

Das zugehörige Koordinatensystem soll kurz das ausgezeichnete System heißen. Die gemeinsame Frequenz ergibt sich zu:

$$k = \sqrt{\frac{c}{A} + \frac{C^2}{4A^2} \omega^2}, \quad (27)$$

was mit dem Werte von Gl. (11a) übereinstimmt.

Die Winkelgeschwindigkeiten p_2^* und q_2^* ergeben sich aus (22), (23) und (26) zu:

$$p_2^* = K_1 \sin(k t + \bar{\varepsilon}), \quad (22a)$$

$$q_2^* = K_2 \sin(k t + \bar{\varepsilon}), \quad (23a)$$

wobei die neuen Konstanten K_1 , K_2 , $\bar{\varepsilon}$ und $\bar{\varepsilon}$ mit den alten durch die Beziehungen:

$$K_1 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos [\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}]}; \quad K_2 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2 A_1 A_2 \cos [\varepsilon^{(1)} - \varepsilon^{(2)}]},$$

$$\operatorname{tg} \bar{\varepsilon} = \frac{A_1 \sin \varepsilon^{(1)} + A_2 \sin \varepsilon^{(2)}}{A_1 \cos \varepsilon^{(1)} + A_2 \cos \varepsilon^{(2)}}; \quad \operatorname{tg} \bar{\varepsilon} = \frac{-A_1 \cos \varepsilon^{(1)} + A_2 \cos \varepsilon^{(2)}}{A_1 \sin \varepsilon^{(1)} - A_2 \sin \varepsilon^{(2)}}$$

verknüpft sind. In bezug auf eine beliebige Achse des ausgezeichneten Systems, die durch O geht und in der Ebene E_0 liegt, gilt dann nach (22a) und (23a), wenn unter η der Verdrehungswinkel zufolge der Schwingungen um diese Achse verstanden wird, die einfache Differentialgleichung: $\ddot{\eta} + k^2 \eta = 0$.

Vom Standpunkt eines Beobachters, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\lambda}^*$ dreht, existiert also tatsächlich eine harmonische Schwingung mit einer einzigen Frequenz. Setzt man nun, dem praktischen Fall entsprechend, voraus, daß der Schwungradkranz eine geringe axiale Erstreckung besitzt, also als scheibenförmiger Körper behandelt werden kann, so gilt hierfür:

$$C = 2 A. \quad (28)$$

Es wird in diesem Falle nach (26): $\dot{\lambda}^* = \omega$. Dies bedeutet aber, daß dann das ausgezeichnete System körperfest wird. Es läßt sich nun die Eigenschwingung tatsächlich aus harmonischen Schwingungen von einheitlicher Frequenz um körperfeste Achsen aufbauen, womit auch die Richtigkeit der vom Verfasser in der erwähnten Arbeit getroffenen Annahme nachgewiesen ist. Die Kreisfrequenz dieser Schwingung um eine körperfeste Achse ergibt sich aus (27) und (28) zu:

$$k = \sqrt{\frac{c + A \omega^2}{A}}. \quad (29)$$

Gl. (29) läßt sich nun so deuten, daß zufolge der Rotation des Schwungrades zum Direktionsmoment der elastischen Kräfte c noch das Direktionsmoment der Führungskräfte (Zentrifugalkräfte) vom Betrage $A \omega^2$ hinzutritt, was die Kreisfrequenz vom Betrage $\sqrt{\frac{c}{A}}$ beim ruhenden Schwungrad auf den Betrag $\sqrt{\frac{c + A \omega^2}{A}}$ erhöht.

Denkt man sich aber ein Schwungrad, dessen axiale Abmessungen nicht mehr klein sind, so treten hierbei, vom Standpunkt eines mit dem Schwungrade fest verbundenen Beobachters aus, wie man leicht einsieht, auch noch Coriolis-Kräfte auf. Diese sind offenbar die physikalische Ursache dafür, daß die Achsen, um welche die Schwingung mit einheitlicher Frequenz erfolgt, wie man aus Gl. (26) folgern kann, mit konstanter relativer Winkelgeschwindigkeit $\dot{\lambda}_{\text{rel}}$ verdrehen. Ihr Betrag ergibt sich aus (26) zu:

$$\dot{\lambda}_{\text{rel}} = \frac{C - 2 A}{2 A} \omega. \quad (30)$$

Da in diesem Fall $C < 2 A$, ist $\dot{\lambda}_{\text{rel}} < 0$; demnach bleibt das ausgezeichnete System in seiner Drehung gegenüber dem Schwungrade zurück.

(Eingegangen am 8. Juli 1946.)

Schwingungen zweier zusammengesetzter Balken.

Von H. Haener, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Arbeit „Schwingungen zweier zusammengesetzter Balken“ behandelt drei Fälle des einseitig eingespannten Balkens.

1. Das freie Ende trägt eine punktförmige Masse, die ihre Größe langsam ändert.
2. Das freie Ende trägt eine drehträge Masse, die konstant ist und mitschwingt.
3. Das freie Ende trägt eine drehträge, elastische Masse.

Für alle drei Fälle wurden durch die Variation des kinetischen Potentials die Differentialgleichungen und die dem jeweiligen System nicht aufgezwungenen Randbedingungen ermittelt. Für Fall I wurde gezeigt, daß bei einem eingespannten Stab mit punktförmiger, von 0 bis unendlich sich ändernder Masse am freien Ende in nachstehenden Bereichen keine Frequenzen vorkommen:

$$K R_n^2 \text{ bis } (3,94 + n\pi)^2 \cdot K,$$

wobei K eine Konstante ist, die die Biegefestigkeit, Massenverteilung und Länge des eingespannten Stabes enthält. R_n ist die Raleighsche Zahl des einseitig eingespannten Stabes. Dabei ist bekanntlich

$$R_0 = 1,875; \quad R_1 = 4,695; \quad R_2 = 7,855 \text{ usw.}$$

Weiter wurde gezeigt, daß die Frequenz des Falles II tiefer als die des Falles I ist. Für den Fall III wurde eine schnelle und einfache Lösungsmethode angegeben.

Summary. The paper deals with three cases of beams having one end built in:

1. The free end carries a small, concentrated mass, the magnitude of which varies slowly.
2. The free end carries a mass of constant magnitude, oscillating with the beam and opposing rotational inertia.
3. The free end carries an elastic mass, opposing rotational inertia.

The boundary conditions not imposed on the system as well as the differential equations have been obtained by varying the kinetic potential. It has been shown in case n° 1 that no frequencies occur at the free end with a clamped bar, carrying a small, concentrated mass, changing its magnitude from zero to infinity, within the limits

$$K \cdot R_n^2 \text{ to } (3,94 + n\pi)^2 \cdot K,$$

K being a constant which comprises the bending strength, mass distribution and length of the bar. R_n is Raleigh's number for a bar clamped at one end. It is well known that

$$R_0 = 1,875; \quad R_1 = 4,695; \quad R_2 = 7,855; \text{ etc.}$$

Furthermore, it has been shown that the frequency in the case n° 2 is lower than in the case n° 1. A quick and simple method of solving case n° 3 has been indicated.

Résumé. Ce travail traite trois cas de poutres encastrées à une extrémité:

- 1° L'extrémité libre porte une masse concentrée en un point et changeant de grandeur lentement.
- 2° L'extrémité libre porte une masse constante, oscillant avec la poutre en opposant de l'inertie à la rotation.
- 3° L'extrémité libre porte une masse élastique, opposant de l'inertie à la rotation.

Les conditions marginales non imposées au système, ainsi que les équations différentielles ont été établies dans ces trois cas, par variation du potentiel cinétique. Dans le cas n° 1 on montre qu'aucune fréquence ne s'établit pour une barre encastrée à une extrémité et variant de grandeur de zéro à l'infini, dans le domaine allant de

$$K \cdot R_n^2 \text{ à } (3,94 + n\pi)^2 \cdot K,$$

K étant une constante qui comprend la résistance en flexion, la répartition des masses et la longueur de la barre. R_n est le nombre de Raleigh pour la barre encastrée à une extrémité. On sait que:

$$R_0 = 1,875; \quad R_1 = 4,695; \quad R_2 = 7,855; \text{ etc.}$$

En outre, on montre que la fréquence dans le cas n° 2 est plus basse que dans le cas n° 1. Pour le cas n° 3, on indique une méthode de solution rapide et simple.

Einleitung.

In vorliegender Arbeit werden mit Hilfe der Variationsrechnung die Differentialgleichungen und die Randbedingungen eines schwingenden Systems ermittelt. Hierbei wird das Prinzip von Hamilton als Ausgangsbeziehung der Elastischen und Bewegungsenergie angesetzt. In dieser Variation sind außer der Eulerschen Differentialgleichung Ausdrücke enthalten, aus denen die im System liegenden Randbedingungen zwangsläufig erhalten werden. Als bekannt werden für die Rechnung diejenigen Randbedingungen vorausgesetzt, die man dem System aufzwingt; z. B. wenn das Ende eines Stabes so eingespannt wird, daß $y(x_1) = y'(x_1) = 0$ ist.

Es werden drei Fälle behandelt, woraus klar zu erkennen ist, daß sich aus der Variationsrechnung auch Randbedingungen ergeben, die man nicht ohne weiteres allein aus der Vorstellung des dynamischen Systems hinschreiben kann. Weiters werden dann aus den an die Randbedingungen angepaßten Lösungen der Differentialgleichungen die Frequenzgleichungen ermittelt. Für den Fall III, dessen Frequenzgleichung ein komplizierter, transzendenter Ausdruck ist, wird eine Methode zur Frequenzerrechnung angegeben, die sehr wenig Mühe erfordert.

Herr Prof. Dr. Ludwig Flamm erfüllte freudig die Bitte des Verfassers, ihm mit seinem großen physikalischen Einfühlungsvermögen beistehen zu wollen und die Arbeit bis in die kleinsten Einzelheiten durchzurechnen.

Nebenstehende Abb. 1 möge die drei Fälle charakterisieren.

Formelzeichen:

l Länge des Horizontalbalkens.

λ Länge des Seitenbalkens.

$\varrho_H q_H$ Masse pro Längeneinheit des Horizontalbalkens.

$\varrho_S q_S$ Masse pro Längeneinheit des Seitenbalkens.

m_H Masse des Horizontalbalkens.

m_S Masse des Seitenbalkens.

G_H Gewicht des Horizontalbalkens.

G_S Gewicht des Seitenbalkens.

$E_H I_H$ Biegefestigkeit des Horizontalbalkens.

$E_S I_S$ Biegefestigkeit des Seitenbalkens.

$y = y(x, t)$ Biegelinie.

ν Frequenz.

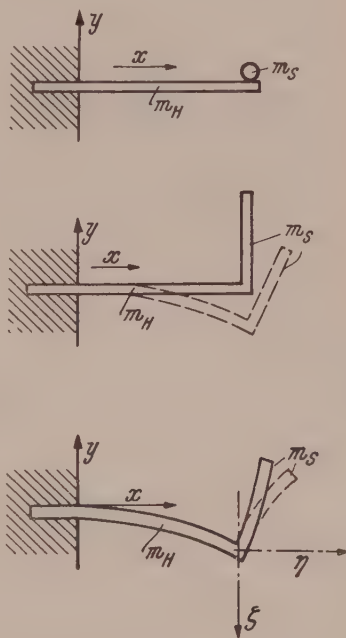


Abb. 1. Fall I bis III.

Eingespannter Balken mit einer punktförmigen Endmasse.

Die Bewegung eines solchen Systems erfolgt nach Hamilton so, daß der zeitliche Mittelwert des kinetischen Potentials ein Minimum wird. Wir erhalten demnach folgendes zu variierende Integral:

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \frac{1}{2} \left\{ \varrho_H q_H \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - E_H J_H \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \right\} dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m_S \left(\frac{\partial y(l)}{\partial t} \right)^2 dt = \min. \quad (1)$$

Wir bezeichnen $F_1 = \varrho_H q_H \dot{y}^2 - E_H J_H y''^2$ und $F_0 = m_S \dot{y}^2(l)$.

Die Variation von (1), partiell integriert, ergibt:

$$2 \delta J = \int_0^l F_{1\dot{y}} \delta y \Big|_{t_1}^{t_2} dx - \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} F_{1\dot{y}} \delta y + \frac{\partial}{\partial x} F_{1y''} \delta y' \right) dx dt + \\ + \int_{t_1}^{t_2} F_{1y''} \delta y' \Big|_0^l dt + F_{0\dot{y}}(l) \delta y(l) \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} F_{0\dot{y}}(l) \delta y(l) dt. \quad (2)$$

Zu den Zeiten t_1 und t_2 gehen die Extremalen durch die beiden Punkte, an denen die variierte und die wirkliche Bahn übereinstimmen. Es verschwinden also in (2) die mit den Funktionsgrenzen t_1 und t_2 behafteten Ausdrücke

$$2 \delta J = - \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} F_{1\dot{y}} \delta y + \frac{\partial}{\partial x} F_{1y''} \delta y' \right) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} F_{1y''} \delta y' \Big|_0^{x=l} dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} F_{0\dot{y}} \delta y \right)_{x=l} dt. \quad (3)$$

Durch die Einspannung bei $x = 0$, d. h. durch die aufgezwungenen Randbedingungen

$$y(0, t) = y'(0, t) = 0, \quad \delta y(0, t) = \delta y'(0, t) = 0 \quad (4)$$

wird in (3)

$$\int_{t_1}^{t_2} (F_{1y''} \delta y')_{x=0} dt = 0.$$

Außerdem läßt sich der zweite Summand unter dem Doppelintegral noch nach x integrieren und wir erhalten aus (3):

$$2 \delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ F_{1y''} - \left(\frac{\partial}{\partial t} F_{0\dot{y}} + \frac{\partial}{\partial x} F_{1y''} \right) \delta y \right\}_{x=l} dt - \int_0^l \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t} F_{1\dot{y}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{1y''} \right) \delta y dx dt. \quad (5)$$

Wenn (5) verschwinden soll, so muß, da

$$\delta y \text{ beliebig für } 0 < X < l \quad (6)$$

und

$$\delta y' \text{ beliebig für } X = l, \quad (7)$$

$$(F_{1y''})_{x=l} = 0, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} F_{1y''} + \frac{\partial}{\partial t} F_{0\dot{y}} \right)_{x=l} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{1\dot{y}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{1y''} = 0, \quad (10)$$

oder

$$y''(l) = 0, \quad (8')$$

$$E_H J_H y'''(l) = m_S \ddot{y}(l), \quad (9')$$

$$E_H J_H y^{IV}(x, t) + \varrho_H q_H \ddot{y}(x, t) = 0. \quad (10')$$

Da die Zeit eine zyklische Variable der Differentialgleichung ist, können wir die Frequenz in (9') und (10') hineinbringen und erhalten zusammengefaßt folgende Randbedingungen:

$$E_H J_H y'''(l) = v^2 \cdot m_S y(l), \quad (11)$$

$$y(0, t) = y'(0, t) = y''(l, t) = 0. \quad (12)$$

Aus (10') ergibt sich die Gleichung des schwingenden Stabes

$$E_H J_H y^{IV} - v^2 \varrho q y = 0. \quad (13)$$

Aus den vier Randbedingungen und der Differentialgleichung (13) läßt sich leicht die Frequenzgleichung eines schwingenden, am Ende belasteten Stabes mit konstantem ϱq und EI erhalten. Sie lautet, wenn $\varrho_H q_H l = m_H$ ist:

$$\frac{m_S}{m_H} = -\frac{1}{a \cdot l} \cdot \frac{\cos a l + \frac{1}{\operatorname{Co} a l}}{\operatorname{Tg} a l \cdot \cos a l - \sin a l} \quad (14)$$

oder

$$\frac{m_S}{m_H} = -\frac{1}{a \cdot l} \frac{H(a l)}{J(a l)} \quad (15)$$

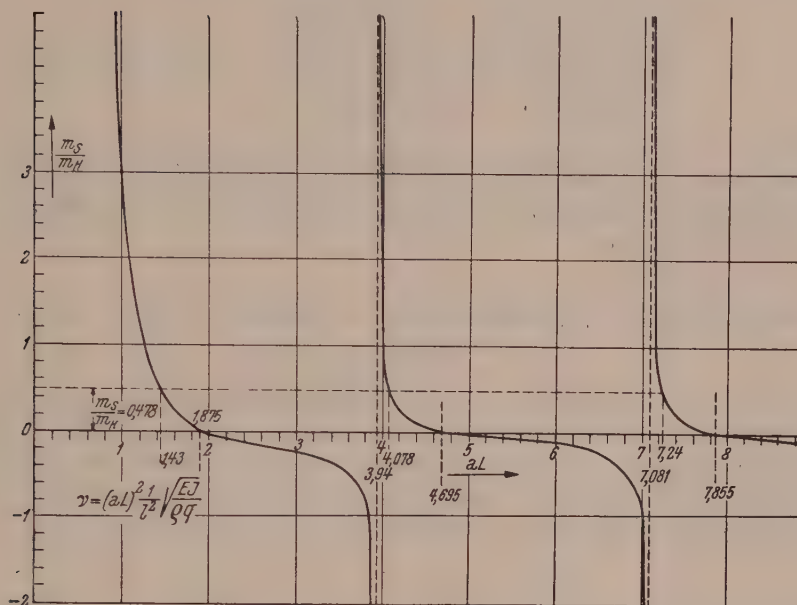


Abb. 2. Darstellung von Gl. 14.

Dabei ist aus (13) und der dazugehörigen Partikulärlösung

$$a^4 = \frac{\rho_H q_H}{E_H J_H} v^2$$

und

$$v = \frac{(a l)^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E_H J_H}{\rho_H q_H}} \quad \text{oder} \quad \omega = \frac{2 \pi (a l)^2}{l^2} \sqrt{\frac{E_H J_H}{\rho_H q_H}} \quad (16)$$

Die rechte Seite der Gl. (14) ist ein Ausdruck, dessen graphische Darstellung es ermöglicht, bei bekanntem Massenverhältnis $(a \cdot l)$ abzulesen. Betrachten wir nun die Beziehung (16), durch die sich die Frequenz v aus dem gefundenen $(a \cdot l)^2$ und der dem Stab eigentümlichen Konstanten $K = \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{E_H J_H}{\rho_H q_H}}$ ergibt, so können wir sehen, daß bei gegebenem K und veränderlicher Endmasse m_S gewisse Frequenzbereiche nicht existieren. Nehmen wir $m_S = \infty$ an, so muß, da der Zähler in (14) nicht ∞ wird, der Nenner Null werden; oder $\operatorname{Tg}(a l) = \operatorname{tg}(a l)$. Dann ist zwar die erste Frequenz Null, die Überfrequenzen aber sind vorhanden. Dieses ist die Frequenzgleichung eines an einem Ende eingespannten, am anderen Ende unterstützten Stabes. Ihre Lösungen lauten: $v_1 = 0$; $v_2 = (3.94)^2 K$; $v_3 = (7.0816)^2 K$; $v_4 = (10.2232)^2 K$; $v_5 = (13.364)^2 K \dots v_n = [3.94 + (n - 2) \pi]^2 \cdot K$.

Nimmt die Masse m_S langsam ab, so steigt die Frequenz und hat den Höchstwert, wenn $m_S = 0$ wird. In (14) muß dann $\cos(a l) + 1/\operatorname{Co} a l = 0$ sein. Die Frequenzen sind dann wie folgt gestiegen:

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 = 0 \text{ steigt auf } \nu_1 &= (1.875)^2 \cdot K, \\ \nu_2 &= (3.94)^2 \quad \quad \quad \nu_2 = (4.695)^2 \cdot K, \\ \nu_3 &= (7.081)^2 \quad \quad \quad \nu_3 = (7.855)^2 \cdot K, \\ \nu_4 &= (10.223)^2 \quad \quad \quad \nu_4 = (10.996)^2 \cdot K \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Es existiert also bei einem eingespannten Stab mit punktförmiger, von 0 bis ∞ veränderlicher Endmasse keine Frequenz in nachstehenden Bereichen:

$$\left. \begin{aligned} \text{von } (1.875)^2 \cdot K \text{ bis } (3.94)^2 \cdot K, \\ \text{,, } (4.695)^2 \cdot K \text{ ,, } (7.081)^2 \cdot K, \\ \text{,, } (7.855)^2 \cdot K \text{ ,, } (10.223)^2 \cdot K, \\ \text{,, } (10.996)^2 \cdot K \text{ ,, } (13.364)^2 \cdot K \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

oder allgemein

$$\text{,, } (R_n)^2 \cdot K \text{ ,, } [3.94 + (n-2)\pi]^2 \cdot K, \quad (19)$$

wobei R_n die Rayleighsche Zahl für ν_n ist. Diese Tatsache ist für verschiedene Gebiete der Technik von Bedeutung.

Eingespannter Balken mit einer nicht punktförmigen, steifen Endmasse.

Dieses Problem unterscheidet sich von Fall I durch Vergrößerung der kinetischen Energie im kinetischen Potential. Es erscheint dann in F_0 ein Zusatzglied mit dem Massenträgheitsmoment I des Seitenbalkens, bezogen auf die Verbindungsstelle. Die beiden Balken sollen so verbunden sein, daß sie an der Verbindungsstelle immer senkrecht aufeinanderstehen. Die potentielle Energie bleibt wie in Fall I. Der Ausdruck F_0 wird größer:

$$F_0 = m_s [\dot{y}(l)]^2 + J \cdot [\dot{y}'(l)]^2.$$

Es gelingt nun leicht, dieses so erweiterte Integral zu variieren. Indem wir wie bei Fall I verlangen, daß an den Grenzen des Zeitintervalls, entsprechend dem Prinzip von Hamilton, außer $\delta y(x, t_1) = \delta y(x, t_2) = 0$ auch $\delta y'(x, t_1) = \delta y'(x, t_2) = 0$ ist, erhalten wir nach der Durchführung der partiellen Integration analog zu (5) folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} 2 \delta J = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(F_{1y''} - \frac{\partial}{\partial t} F_{0y'} \right) \delta y' - \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{1y''} + \frac{\partial}{\partial t} F_{0y} \right) \delta y \right\} dt \Big|_{x=l} \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left\{ \frac{\partial}{\partial t} F_{1y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{1y'} \right\} \delta y \, dx \, dt. \end{aligned} \quad (20)$$

An der Einspannstelle $x = 0$ ist das Verschwinden von (20) von selbst erfüllt. Diese Gl. (20) enthält die Differentialgleichungen der Randwerte und die Differentialgleichung des schwingenden Stabes. Wie im Falle einer punktförmigen Endmasse gilt auch hier für das einzelne Verschwinden der Koeffizienten von δy und $\delta y'$ die Begründung (6) und (7), wonach sein muß:

$$\left(F_{1y''} - \frac{\partial}{\partial t} F_{0y'} \right)_{x=l} = 0; \quad (21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} F_{1y''} + \frac{\partial}{\partial t} F_{0y} \right)_{x=l} = 0; \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{1y} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{1y'} = 0. \quad (23)$$

Mit den Werten für F_1 und F_0 ergibt sich

$$-EJ y''(l) - J_s \ddot{y}'(l) = 0; \quad (21')$$

$$-EJ y'''(l) + m_S \ddot{y}(l) = 0; \quad (22')$$

$$EJ y^{IV}(x, t) + \varrho q \ddot{y}(x, t) = 0. \quad (23')$$

Mit demselben Ansatz wie bei Fall I erhalten wir analog zu (11), (12) und (13) für das Moment

$$EJ y''(l) = J_S v^2 y'(l) \quad (24)$$

und für die Querkraft

$$EJ y'''(l) = -m_S v^2 y(l). \quad (25)$$

Für die Differentialgleichung der Biegeschwingung:

$$EJ y^{IV}(x) - \varrho q v^2 y(x) = 0. \quad (26)$$

Mit den Randbedingungen der Einspannstelle $y(0, t) = y'(0, t) = 0$ und mit den Randbedingungen (24) und (25) lautet dann die Frequenzgleichung eines eingespannten Stabes, an dessen freiem Ende eine unelastische, drehträge Masse befestigt ist, wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{E}_0 l a l} + \cos a l = -a l \frac{m_S}{m_H} (\operatorname{Tg} a l \cdot \cos a l - \sin a l) + (a l)^3 \frac{J_S}{m_H l^2} (\operatorname{Tg} a l \cdot \cos a l + \\ + \sin a l) - (a l)^4 \frac{m_S J_S}{m_H^2 l^2} \left(\frac{1}{\mathfrak{E}_0 l a l} - \cos a l \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Wir bezeichnen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathfrak{E}_0 l \varphi} + \cos \varphi = H(\varphi); \quad \operatorname{Tg} \varphi \cdot \cos \varphi - \sin \varphi = J(\varphi); \\ \frac{1}{\mathfrak{E}_0 l \varphi} - \cos \varphi = L(\varphi); \quad \operatorname{Tg} \varphi \cdot \cos \varphi + \sin \varphi = K(\varphi). \end{aligned} \quad (28)$$

Damit lautet dann (27)

$$H(a l) = -a l \frac{m_S}{m_H} J(a l) + (a l)^3 \frac{J}{m_H l^2} K(a l) - (a l)^4 \frac{m_S J}{m_H^2 l^2} L(a l). \quad (27')$$

Freie Biegeschwingung eines Balkens mit einer stabförmigen elastischen Endmasse.

Die Schwingung der beiden Balken H und S soll in einer Ebene stattfinden. Die Verbindungsstelle ist so, daß an dieser die beiden Balken immer einen rechten Winkel bilden. Die Biegefestigkeiten und die Massenverteilungen entlang der beiden Balken sollen konstant sein. Es werden vernachlässigt die Rotationen der Teilchen $dm_H dm_S$ um die Teilchenachsen und die Längsschwingungen in Richtung der Biegelinien. Den beiden vorangegangenen Fällen entsprechend bezeichnen wir:

$$\begin{aligned} \varrho_H q_H - E_H J_H y''^2 = F_1(\dot{y}, y''), \\ \varrho_S q_S - E_S J_S \eta''^2 = F_2(\dot{\eta}, \eta''), \\ m_S \dot{y}^2 + J \dot{y}'^2 = F_0(\dot{y}, \dot{y}'), \end{aligned} \quad (29)$$

wobei $y = y(x, t)$ und $\eta = \eta(\xi, t)$.

Allgemein lautet dann das zu variierende Integral

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x=0}^{x=l} F_1(\dot{y}, y'') dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\xi=1}^{\xi=2} F_2(\dot{\eta}, \eta'') d\xi dt + \int_{t_1}^{t_2} F_0(\dot{y}, \dot{y}')_{x=l} dt. \quad (30)$$

Aus der Bedingung, daß die beiden schwingenden Balken an der Verbindungsstelle ständig einen rechten Winkel bilden, können wir ein festes Verhältnis der Ableitungen der Zusatzfunktionen $\delta y(x, t)$ und $\delta \eta(\xi, t)$ an dieser Stelle herleiten. Es stellen δy und $\delta \eta$ die bei der Variation auftretenden, mit einem Parameter versehenen Kurvenscharen dar, in welchen die Extremalen mit dem Parameter Null eingebettet sind.

Mit obiger Voraussetzung ist es möglich, die Variation des Integrals der Forderung entsprechend zu differenzieren und $\delta y'$ durch $\delta \eta'$ zu ersetzen. Beziehen wir die in den beiden ersten Fällen beachteten Schlüsse ein, so erhalten wir aus (30):

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ -\delta y \left(\frac{\partial}{\partial t} F_{0\dot{y}} + \frac{\partial}{\partial x} F_{1y''} \right)_{x=l} - \delta y' \left(\frac{\partial}{\partial t} F_{0\dot{y}'} - F_{1y''} - F_{2\eta''} \right)_{\xi=0}^{x=l} \right. \\ & \left. - \delta \eta \frac{\partial}{\partial \xi} F_{2\eta''} \Big|_{\xi=0} \right\} dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \delta y \left(\frac{\partial}{\partial t} F_{1\dot{y}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{1y'} \right) dx dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{\xi_2=\lambda} \delta \eta \left(\frac{\partial}{\partial t} F_{2\dot{\eta}} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} F_{2\eta''} \right) d\xi dt. \end{aligned} \quad (31)$$

An Stelle $x = l$, $\xi = 0$ sind, ausgenommen $\delta \eta$, die Variationen und ihre ersten Ableitungen beliebig, so daß an dieser Stelle alle ihre Koeffizienten verschwinden müssen, und zwar jeder für sich. Es muß also sein:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} F_{0\dot{y}} + \frac{\partial}{\partial x} F_{1y''} \right)_{x=l} = 0, \quad (32)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} F_{0\dot{y}'} - F_{1y''} + F_{2\eta''} \right)_{\xi=0}^{x=l} = 0. \quad (33)$$

Wenn der Ausdruck (31) Null werden soll, so gilt für alle x und für alle ξ , daß die Ausdrücke unter dem Doppelintegral auch einzeln verschwinden:

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{1\dot{y}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} F_{1y'} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{2\dot{\eta}} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} F_{2\eta''} = 0. \quad (35)$$

Aus (32) bis (35) die Funktionen F_0 , F_1 , F_2 aus dem kinetischen Potential eingesetzt, ergibt:

$$m_s \ddot{y}(l) - E_H J_H y'''(l) = 0, \quad (32')$$

$$J_s \ddot{y}'(l) + E_H J_H y''(l) - E_s J_s \eta''(0) = 0, \quad (33')$$

$$E_H J_H y^{IV} + \varrho_H q_H \ddot{y} = 0, \quad (34')$$

$$E_s J_s \eta^{IV} + \varrho_s q_s \ddot{\eta} = 0. \quad (35')$$

Aus dem Vergleich von (32') mit (9') können wir sehen, daß die Bedingung an der Verbindungsstelle so ist, als wäre die Masse m_s des Seitenbalkens in diesem Punkte vereinigt. Eine Komponente der aus der elastischen Schwingung von S herrührenden Kraft kommt in (32') additiv dazu, wenn die anfangs gemachte Bedingung, wonach es sich um kleine Ausschläge handeln soll und wonach die Schwingungen in Richtung der elastischen Achse von H nicht vorkommen sollen, nicht berücksichtigt werden. Anschauungsmäßig ist es leicht erklärlich, daß die Komponente von $E_s J_s \eta'''(0)$ in Richtung der y -Achse fast Null ist. Unabhängig davon zeigt diese Rechnung, daß der Summand $-\delta \eta \frac{\partial}{\partial \xi} F_{2\eta''}$ in (31) infolge $\delta \eta(0, t) = 0$ verschwindet und demnach $E_s J_s \eta'''(0)$ in (32') nicht vorkommt. Der verschwindende Koeffizient von $\delta y'$, das ist Gl. (33'), ergibt die Bedingung für das Moment an dieser Stelle. Die Differentialgleichung (33') unterscheidet sich von (21') durch das aus der elastischen Schwingung von S herrührende Moment $E_H J_H y''(l)$. Sein Vorzeichen ergibt sich aus der Variation als entgegengesetzt von dem Moment $E_s J_s \eta''(0)$. In (33') bedeutet $y'(l)$ die Winkelbeschleunigung, die der Seitenbalken S haben würde, wenn er steif wäre. Die Randbedingungen für Momente und Querkräfte an den freien Enden eines solchen Balkensystems könnte man ebenfalls aus der Variation erhalten. Dabei ist zu beachten, daß das einfache Integral in (31), welches sich auf die Verbindungs-

stelle bezieht, aus einem Ausdruck entstanden ist, dessen Gültigkeit sich von $\xi = 0$ bis $\xi = \xi_2$ erstreckte. An der Endstelle von S , bei $\xi = \xi_2$ ist aber $\delta\eta' \neq \delta y'$ und demnach

$$\left(-\delta\eta' F_{2\eta''} - \delta\eta \frac{\partial}{\partial \xi} F_{2\eta''} \right)_{\xi=\xi_2} = 0 \quad (36)$$

werden muß. Da nun aber $\delta\eta$ beliebig für $0 < \xi \leq \xi_2$ und $\delta\eta'$ beliebig für $\xi = \xi_2$ ist, müssen in (36) die Koeffizienten davon jeder für sich verschwinden und wir erhalten für Moment und Querkraft an der Stelle $\xi = \xi_2$:

$$\eta''(\xi_2) = 0, \quad (37)$$

$$\eta'''(\xi_2) = 0. \quad (38)$$

Zusammenfassend haben wir die dem System aufgezwungenen Randbedingungen $y(0) = y'(0) = 0$, $y'(l) = \eta'(0)$, $\eta(0) = 0$ und diejenigen, die sich zwangsläufig ergeben: (32'), (33'), (37) und (38). Es steht nun nichts mehr im Wege, die Frequenzgleichung zu ermitteln. Mit den Abkürzungen (28) lautet sie

$$\begin{aligned} H(al) = & - (al) \cdot \frac{m_S}{m_H} J(al) + \\ & + \left[\sqrt[4]{\frac{(E_S J_S)^3}{(E_H J_H)^3} \cdot \frac{q_S q_H}{e_H q_H} \cdot \frac{J(bl)}{H(bl)}} + (al)^3 \frac{J_S}{m_H l^3} \right] K(al) - \\ & - (al) \frac{m_S}{m_H} \left[\sqrt[4]{\frac{(E_S J_S)^3}{(E_H J_H)^3} \cdot \frac{q_S q_H}{e_H q_H} \cdot \frac{J(bl)}{H(bl)}} + (al)^3 \frac{J_S}{m_H l^3} \right] L(al). \end{aligned} \quad (39)$$

Zum Unterschied von den beiden ersten Frequenzgleichungen kommt in (39) außer $a \cdot l$ auch noch $b \cdot \lambda$ im Argument vor. Aus der Gl. (35') und der dazugehörigen Partikulärlösung ergibt sich

$$\lambda^2 = v \sqrt[4]{\frac{q_S q_H}{E_S J_S}} \quad (40)$$

und das feste Verhältnis

$$\frac{al}{b\lambda} = \frac{l}{\lambda} \sqrt[4]{\frac{E_S J_S}{E_H J_H} \cdot \frac{q_H q_H}{e_S q_S}} = \sqrt[4]{\frac{E_S J_S}{E_H J_H} \cdot \frac{G_H l^3}{G_S \lambda^3}} \quad (41)$$

Zur graphischen Darstellung von (39) ist noch zu bemerken, daß man in den Argumenten nicht gemäß (41) $a \cdot l$ durch $b \cdot \lambda$ oder umgekehrt ersetzt, sondern das Verhältnis (41) so zur Geltung bringt, daß man als Abszisse sowohl $a \cdot l$ als auch $b \cdot \lambda$ aufträgt. Dabei ist (41) konstant. Am zweckmäßigsten zeichnet man die Kurven (28) und den Quotienten J/H . Die Kurven gelten für alle Balken, die den Bedingungen des Falles III entsprechen. In einer weiteren Darstellung wird dann die Abszisse entsprechend (41) eingeteilt und die Kurven können gezeichnet werden. Ein Beispiel aus dem Flugzeugbau wird hier angeführt: Das Seitenleitwerk ist am Ende des Höhenleitwerkes befestigt. Es sollen die Eigenwerte bestimmt werden.

Angaben:

Höhenleitwerk:

$$q_H q_H = 2.025 \text{ kgm}^{-2}\text{sec}^2,$$

$$l_H = 1.237 \text{ m},$$

$$m_H = 2.5 \text{ kgm}^{-1}\text{sec}^2,$$

$$E_H J_H = 2.25 \cdot 10^4 \text{ kgm}^2.$$

Seitenleitwerk:

$$q_S q_S = 1.305 \text{ kgm}^{-2}\text{sec}^2,$$

$$b = 0.666 \text{ m},$$

$$m_S = 1.2 \text{ kgsec}^2\text{m}^{-1},$$

$$E_S J_S = 1.125 \cdot 10^4 \text{ kgm}^2.$$

Aus (41) ergibt sich $al = b\lambda \cdot 1.75$.

In Abb. 3 sieht man die Darstellung der Gl. (39) für obige Angaben. Zum Vergleich ist die Kurve des Falles II etwas schwächer hereingezeichnet worden.

Die drei Fälle vergleichend, Abb. 4, können wir sehen, daß die tiefste Frequenz

sich für unser Beispiel von $v_{I_1} = 140 \text{ sec}^{-1}$ auf $v_{II_1} = 133 \text{ sec}^{-1}$ und schließlich auf $v_{III_1} = 123 \text{ sec}^{-1}$ herabgesetzt, während die erste Oberfrequenz von Fall I $v_{I_2} =$

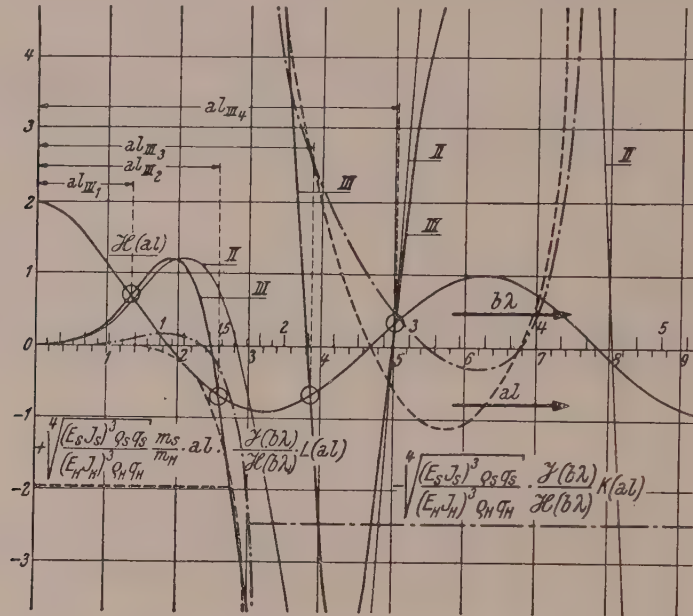


Abb. 3. Darstellung von Gl. 39.

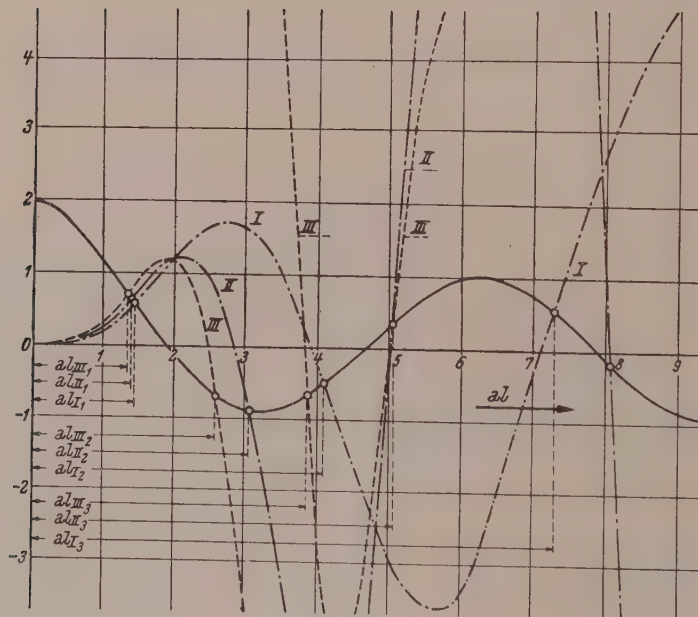


Abb. 4. Darstellung der drei Fälle.

$= 1145 \text{ sec}^{-1}$ sehr hoch ist, beim Fall II auf $v_{II_2} = 633 \text{ sec}^{-1}$ und beim Fall III auf $v_{III_2} = 460 \text{ sec}^{-1}$ fällt, was verglichen mit v_{I_2} sehr niedrig ist. Es wird also in unserem Beispiel durch Berücksichtigung der Rotationsbewegung und der elastischen Schwingung des Seitenbalkens die erste Oberfrequenz um mehr als die Hälfte kleiner.

Aus der Betrachtung der Frequenzgleichung und der Darstellungen der darin enthaltenen Kurven können wir von der Größe der tiefsten Frequenz der drei Fälle behaupten: Die Frequenz des Falles II ist tiefer als die des Falles I, wenn

$$\left[K(a l) - a l \frac{m_S}{m_H} \cdot L(a l) \right]_{a l = a l_{I_1}} > 0$$

oder wenn

$$\frac{1}{a l} \frac{K(a l)}{L(a l)} \Big|_{a l = a l_{I_1}} > \frac{m_S}{m_H} \quad (42)$$

ist. In (14) haben wir aber $\frac{m_S}{m_H} = -\frac{1}{a l} \frac{H(a l)}{J(a l)}$ für $a l = a l_{I_1}$, so daß aus (42) sich ergibt:

$$\frac{K(a l)}{L(a l)} > -\frac{H(a l)}{J(a l)}. \quad (42')$$

Die Forderung (42') ist aber für die in Frage kommenden Bereiche immer erfüllt, so daß die tiefste Frequenz des Falles II immer niedriger ist als die des Falles I.

Die tiefste Frequenz des Falles III ist tiefer als dieselbe des Falles II, wenn

$$\left[(a l) \frac{m_S}{m_H} \frac{J(b \lambda)}{H(b \lambda)} \cdot L(a l) - \frac{J(b \lambda)}{H(b \lambda)} K(a l) \right]_{a l = a l_{II_1}} > 0 \quad (43)$$

ist. Für das Verhältnis $\frac{a \cdot l}{b \cdot \lambda} \geq 1$, d. h. laut Kurvendarstellung, daß $\frac{J(b \lambda)}{H(b \lambda)} < 0$ für den in Frage kommenden Bereich von $a l = 0$ bis $a l = 1.875$ (Rayleighsche Zahl). Demnach ist (43) auch erfüllt, wenn darin

$$\frac{1}{a \cdot l} \frac{K(a l)}{L(a l)} \Big|_{a l = a l_{II_1}} < \frac{m_S}{m_H}. \quad (43')$$

(Eingegangen am 23. September 1947.)

Zentrierung und Auflösungsvermögen beim Übermikroskop.¹

Von W. Glaser, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Begrenzung des Auflösungsvermögens des Übermikroskops, welche dadurch bedingt ist, daß die Achse des Objektivs nicht mit der Achse des abbildenden Strahlenbündels übereinstimmt, wird in ihrer Abhängigkeit vom Neigungswinkel dieser beiden Achsen und der Apertur des Strahlenbündels für hohe Vergrößerungen bestimmt.

Summary. The limitation of the resolving power of an electronic microscope, due to the fact that the axis of the objective does not coincide with the axis of the image-forming bundle, is calculated as a function of the angle between these two axes, and of the aperture of the image-forming bundle for high magnifications.

Résumé. La limitation du pouvoir résolvant d'un microscope électronique, due au fait que l'axe de l'objectif ne coïncide pas avec celui du faisceau de rayons composant l'image, est déterminée en fonction de l'angle compris entre ces deux axes et de l'ouverture du faisceau de rayons pour les agrandissements importants.

Wenn die Achse des abbildenden Strahlenbündels beim Übermikroskop mit der optischen Achse des Objektivs, d. h. der Rotationsachse des abbildenden Feldes nicht übereinstimmt, so wird sich diese mangelnde Zentrierung darin äußern, daß außer

¹ Die Arbeit ist bereits im Jahre 1944 und bezüglich der Problemstellung zum Teil in Zusammenarbeit mit dem Lab. f. Elektronenoptik der Siemens & Halske A. G. und dem Lab. f. Elektronenphysik (M. v. Ardenne) verfaßt worden.

dem Öffnungsfehler auch noch die sieben weiteren elektronenoptischen Bildfehler zur Wirkung kommen und damit das Auflösungsvermögen herabsetzen. Im folgenden soll der Einfluß der mangelnden Zentrierung auf das Auflösungsvermögen des Übermikroskops quantitativ untersucht werden. Die Strahlenachse und optische Achse können im allgemeinsten Fall windschief zueinander liegen. Wir wollen jedoch im folgenden voraussetzen, daß sich Strahlenachse und optische Achse schneiden, und zwar im „Zentrum“ des Objektivs, d. h. am Ort des Maximums des Objektivfeldes. Den Winkel β zwischen optischer Achse und Strahlenachse, welcher für die Abweichung

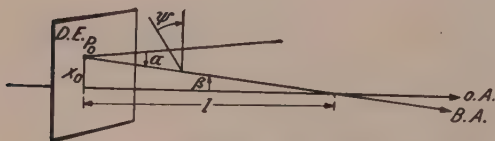


Abb. 1. Zur Festlegung des Strahles S durch die beiden Winkel α und ψ . $D.E.$ Dingebene, P_0 Dingpunkt, $o.A.$ optische Achse, $B.A.$ Achse des abbildenden Bündels, O Schnittpunkt zwischen optischer Achse $o.A.$ und Bündelachse $B.A.$

von der idealen Zentrierung kennzeichnend ist, wollen wir „Deviationswinkel“ nennen. Jeder Strahl im abbildenden Bündel werde durch zwei Winkel α und ψ festgelegt. α sei der Winkel des Strahles mit der Bündelachse und ψ sei der Winkel einer Ebene durch Strahl und Bündelachse. Die Koordinatendifferenzen des Punktes P_1' , in dem der durch α und ψ festgelegte Strahl des Bündels die Gaußsche Bildebene durchstößt, gegenüber dem Gauß-

schen Bildpunkt P_1 wollen wir mit Δx_1 und Δy_1 bezeichnen. Vorgegebenen Werten von α und β entspricht ein bestimmter Strahlenkegel der Öffnung α mit der Achsenneigung β . Läßt man ψ alle Werte von 0 bis 2π durchlaufen, so wird durch $\Delta x_1(\psi)$ und $\Delta y_1(\psi)$ der geometrische Ort der Durchstoßpunkte der Strahlen des betrachteten Strahlenkegels mit der Bildebene dargestellt. Diese Kurven heißen Aberrationskurven. Läßt man α von Null bis zum Werte α_m der Bündelöffnung variieren, erhält man das von den Aberrationskurven des Bündels in der Bildebene bedeckte Gebiet. Die Abweichungen Δx_1 und Δy_1 wollen wir durch die Vergrößerung V dividieren. Man erhält so die auf die Dingebene bezogenen Aberrationen,

$$\delta x = \frac{\Delta x_1}{V}, \quad \delta y = \frac{\Delta y_1}{V}. \quad (1)$$

Für δx und δy ergeben sich — worauf wir an dieser Stelle nicht näher eingehen wollen — die Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= B_2 \alpha^3 \cos \psi + [F_2 (2 + \cos 2\psi) + f_2 \sin 2\psi] \alpha^2 \beta + [(2C_2 + D_2) \cos \psi + \\ &\quad + f_2 \sin \psi] \alpha \beta^2 + E_2 \beta^3, \\ \delta y &= B_2 \alpha^3 \sin \psi + [F_2 \sin 2\psi + f_2 (2 - \cos 2\psi)] \alpha^2 \beta + [D_2 \sin \psi + c_2 \cos \psi] \alpha \beta^2 + \\ &\quad + e_2 \beta^3. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Für die „Bildfehlerkonstanten“ B_2 , F_2 , f_2 , C_2 , c_2 , D_2 , E_2 und e_2 hat unsere allgemeine Rechnung bestimmte Integralausdrücke ergeben, die sich aus dem Feldverlauf längs der optischen Achse grundsätzlich berechnen lassen. Wir wollen sie hier aus Gründen der Raumersparnis nicht anschreiben. Es ist wesentlich, daß durch die Gl. (2) die Aberrationskurven durch die Richtung der Bündelachse β und die Bündelöffnung α festgelegt werden, so wie es von der elektronenoptischen Praxis erfordert wird, während in der Lichtoptik die Bildfehlerkonstanten gewöhnlich durch die Blende bestimmt werden. Die Koeffizienten in Gl. (2) wollen wir als Öffnungsfehler B_2 ,² isotope und anisotrope Koma F_2 und f_2 , isotropen und anisotropen Astigmatismus

² Dieser Koeffizient ist mit der bereits früher berechneten und vielfach verwendeten Größe C_0 identisch. Vgl. W. Glaser: Z. Phys. 117, 285 (1941).

mus C_2 und c_2 , als Bildwölbung D_2 und als isotrope und anisotrope Verzeichnung E_2 und e_2 des blendenfreien Systems bezeichnen.³

Bei Benützung einer Blende wird jeder Strahl im Bündel durch seinen Achsenabstand x_0 in der Dingebene und durch die Polarkoordinaten r und χ seines Durchstoßpunktes P_B mit der Blendenebene festgelegt. Das ganze von P_0 ausgehende Bündel erhält man, wenn man r von 0 bis zum Blendenradius r_B und ψ von 0 bis 2π wachsen läßt. Der Strahlenkegel, welcher seine Spitze in P_0 und den Kreis $r = \text{konst}$ in der Blendenebene zur Leitkurve hat, schneidet die Gaußsche Bildebene in einer Aberrationskurve. Für diese ergeben sich, wenn man sie gleichfalls durch Division mit der Vergrößerung auf die Dingebene bezieht, die Gleichungen⁴

$$\left. \begin{aligned} \delta x &= B r^3 \cos \chi + [F(2 + \cos 2\chi) + f \sin \chi] r^2 x_0 + \\ &\quad + [(2C + D) \cos \chi + c \sin \chi] r x_0^2 + E x_0^3, \\ \delta y &= B r^3 \sin \chi + [F \sin 2\chi + f(2 - \cos 2\chi)] r^2 x_0 + \\ &\quad + [D \sin \chi + c \cos \chi] r x_0^2 + e x_0^3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

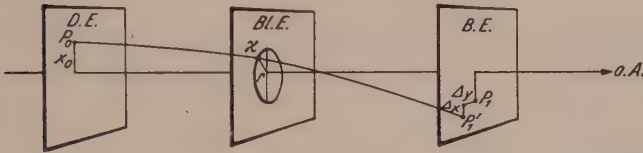


Abb. 2. Zur Festlegung des Strahles im System mit Blende und zur Definition der Aberrationskurven.

Durch Vergleich der für die Konstanten $B_2 \dots e_2$ aus Gl. (2) des blendenfreien Systems geltenden allgemeinen Ausdrücke, mit denen für die Bildfehlerkonstanten $B \dots e$ aus Gl. (3) des Systems mit Blende, kann man nun die zwischen diesen beiden Koeffizientensystemen bestehenden Beziehungen aufstellen. Bedeuten $h(z)$ und $g(z)$ jene achsennahen Bahnen, welche durch die Bedingungen

$$h(z_0) = 0, \quad g(z_0) = 1 \quad \text{und} \quad h(z_B) = 1, \quad g(z_B) = 0 \quad (4)$$

in Ding- und Blendenebene festgelegt sind und ist l die Entfernung der Dingebene vom Schnittpunkt zwischen Feld- und Bündelachse, so setze man

$$\tau_1 = \frac{1}{h'(z_0)} \quad \text{und} \quad \sigma = -l \frac{g'(z_0)}{h'(z_0)} - \frac{1}{h'(z_0)}. \quad (5)$$

Die Aberrationskoeffizienten des „blendenfreien Systems“ $B_2 \dots e_2$ berechnen sich damit aus den Koeffizienten $B \dots e$ des Systems mit Blende auf folgende Weise:

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= \tau_1^3 B, \\ F_2 &= \tau_1^2 (e F + \sigma B), \\ C_2 &= \tau_1 (e^2 C + 2 e \sigma F + \sigma^2 B), \\ D_2 &= \tau_1 (e^2 D + 2 e \sigma F + \sigma^2 B), \\ E_2 &= e^3 E + e^2 \sigma (2 C + D) + 3 e \sigma^2 F + \sigma^3 B, \\ f_2 &= \tau_1^2 e f, \\ c_2 &= \tau_1 (e^2 c + 2 e \sigma f), \\ e_2 &= e^3 c + e^2 \sigma c + e \sigma^2 f. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

³ Auch die Namen „Drehungskoma“ für f_2 usw. haben wir verwendet.

⁴ Über die allgemeine Berechnung der Bildfehlerkoeffizienten vgl. W. Glaser: Z. Phys. **83**, 104 (1933); **97**, 177 (1935), ferner P. Funk: Mon. Math. Phys. **43**, 305 (1936).

Die ausführliche Herleitung der Formeln (1) und (2) einschließlich der entsprechenden für den allgemeinsten Fall einer windschiefen Lage von Bündelachse und optischer Achse soll einer späteren Veröffentlichung vorbehalten bleiben.⁵

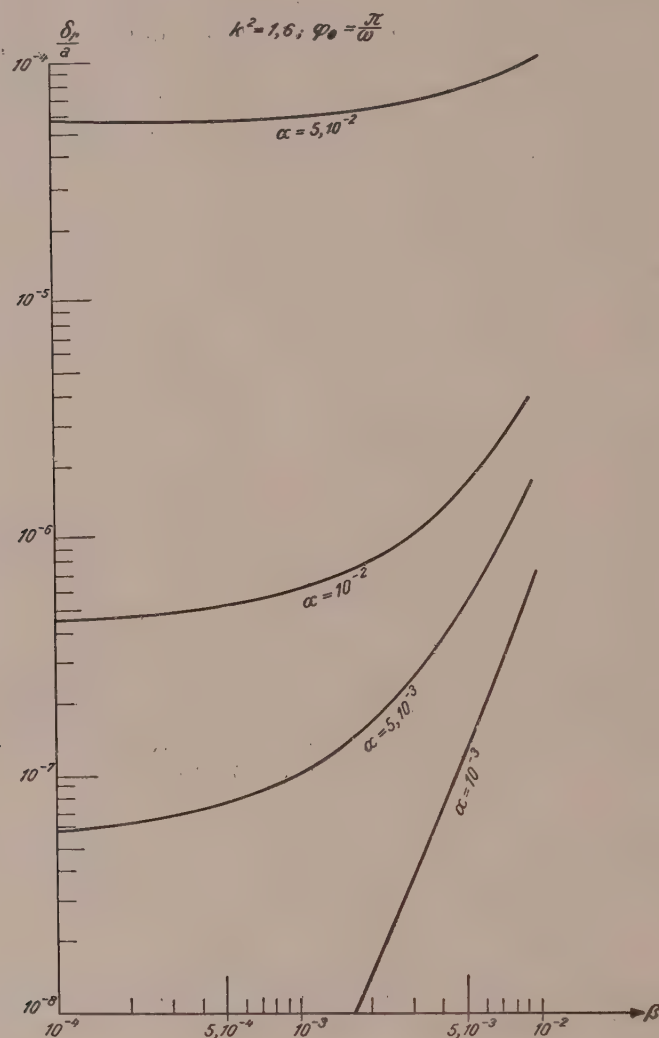


Abb. 3. Auflösungsgrenze des Übermikroskops in Abhängigkeit vom Deviationswinkel β für verschiedene Aperturen α . Der Parameter der Linsenstärke k^2 wird gleich 1.6 angenommen. a bedeutet die Halbwertsbreite des Objektivfeldes.

Bei hoher Vergrößerung, wie sie im Übermikroskop vorliegt, fällt die Dingebene praktisch mit der dingseitigen Brennebene zusammen, so daß wir für l den Ausdruck $l = -z_f$ setzen können, wobei z_f die vom Objektivzentrum gerechnete Abszisse des Brennpunktes bedeutet.

Für das glockenförmige magnetische Abbildungsfeld⁶

⁵ Insbesondere in dem im Verlag Manz & Co. erscheinenden Buch über die Grundlagen der Elektronenoptik.

⁶ W. Glaser: Z. Phys. 117, 285 (1941).

$$B_z = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{z}{a}\right)^2}, \quad (7)$$

das den Feldverlauf in Polschuhobjektiven gut wiedergibt, haben wir nun die Aberrationskoeffizienten $B, C, D \dots$ usw. als Funktion von Ding- und Blendenlage und des die „Linsenstärke“ kennzeichnenden Parameters $k^2 = \frac{e B_0^2 a^2}{8 m U}$ berechnet.⁷ Mit

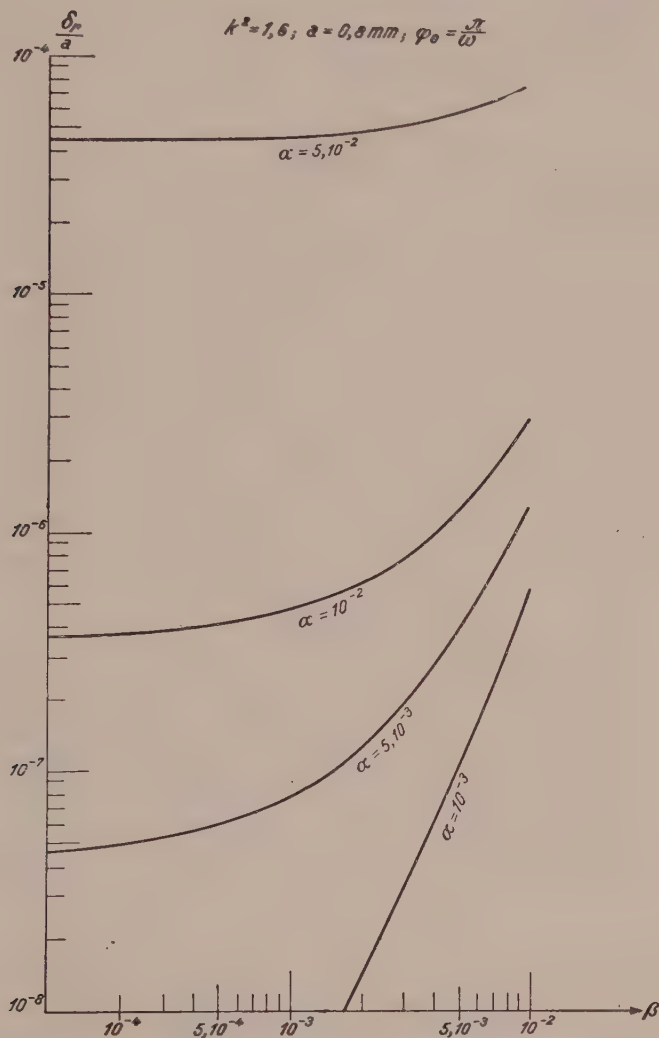


Abb. 4. Auflösungsgrenze in Abhängigkeit vom Dezentrierungswinkel β für eine Feldhalbwertsbreite $a = 9.8 \text{ mm}$. $k^2 = 1.6$.

⁷ W. Glaser und E. Lammell: Arch. Elektrotechn. **37**, 347 (1943). Über die Darstellung experimenteller Messungen durch das Feld (5) vgl. insbesondere E. Ruska: Arch. Elektrotechn. **38**, 102 (1944), ferner J. Dosse: Z. Phys. **117**, 722 (1941), und Kai Siegbahn: Arkiv Mat. Astr. och Fysik **30**, 1 (1944). Die angegebene Gestalt (7) des abbildenden Magnetfeldes mit den berechneten Elektronenbahnen ist daher im Anschluß an die erwähnte Arbeit auch von anderen Autoren ihren elektronenoptischen Berechnungen mit Erfolg zugrunde gelegt worden. Vgl. z. B. L. Marton und R. C. E. Hutter: Phys. Rev. **65**, 161 (1944), H. Slätis, Arkiv Mat. Astr. och Fysik **32 A**, 1 (1945), G. S. Ellis: Canad. Journ. of Research **A**, **25**, 322 (1947), ferner L.

den angeführten Beziehungen (2) und den bekannten achsennahen Elektronenbahnen dieses Feldes

$$h(z) = \frac{\sin \varphi_B}{\sin \omega (\varphi_B - \varphi_0)} \frac{\sin \omega (\varphi - \varphi_0)}{\sin \varphi}, \quad g(z) = \frac{\sin \varphi_0}{\sin \omega (\varphi_0 - \varphi_B)} \frac{\sin \omega (\varphi - \varphi_B)}{\sin \varphi}, \quad (8)$$

wobei die Winkel φ , φ_0 und φ_B durch

$$z = \operatorname{actg} \varphi, \quad z_0 = \operatorname{actg} \varphi_0 \quad \text{und} \quad z_B = \operatorname{actg} \varphi_B \quad (9)$$

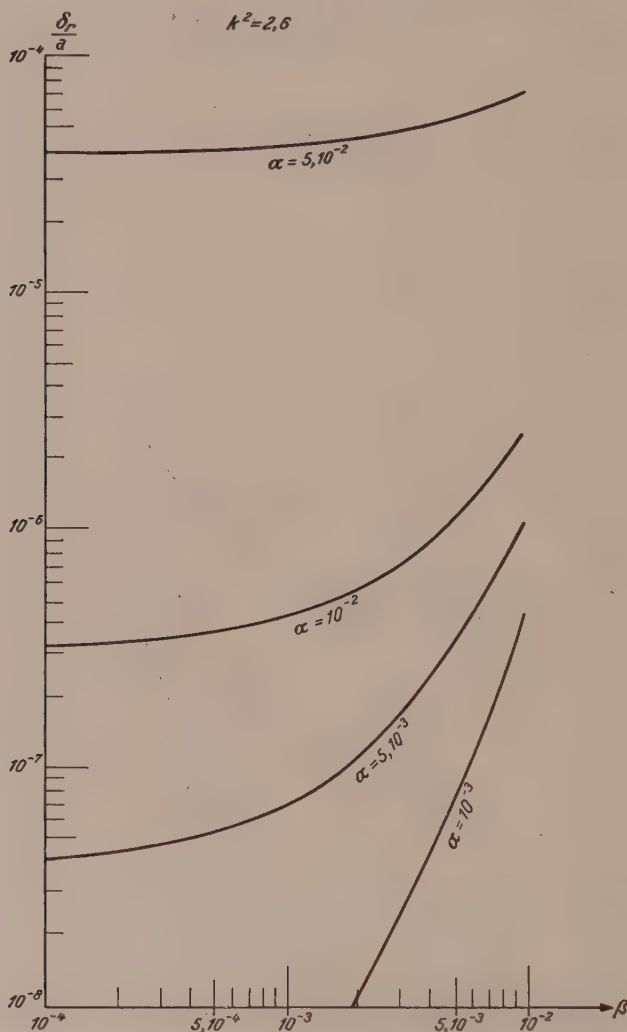


Abb. 5. Grenze des Auflösungsvermögens als Funktion des Deviationswinkels β und der Strahlapertur α für die Linsenstärke $k = 2.6$.

definiert sind, lassen sich daher auch die Aberrationskoeffizienten $B_2, F_2 \dots$ usw. des „blendenfreien“ Systems berechnen und somit die Aberrationskurven (1) explizit bestimmen. Für den Parameterwert

Marton: J. Appl. Physics 18, 522 (1947). Siehe auch V. E. Cosslett: Introduction to Elektron Optics, Oxford 1946 und V. K. Zworgkin, G. A. Morton, E. G. Ramberg, J. Hillier, A. W. Vance: Elektron Optics and the Elektron Mikroskope, New York. 3th Printing 1948. S. 506ff. und 624.

$$k^2 = 1.6, \quad (10)$$

wie er praktischen Arbeitsbedingungen entspricht, hat die numerische Auswertung ergeben

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= 0.443 a, & C_2 &= 0.250 a, & D_2 &= 0.827 a, & F_2 &= -0.414 a, \\ E_2 &= -0.495 a & c_2 &= -0.480 a, & f_2 &= 0.247 a, & e_2 &= 0.325 a. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Um nun die Begrenzung des Auflösungsvermögens durch einen bestimmten Deviationswinkel zwischen Objektiv- und Bündelachse abzuschätzen, haben wir die Ausdehnung, d. h. den größten Durchmesser des von den Aberrationskurven bedeckten Gebietes bestimmt. Es wurde also für die verschiedenen ψ -Werte das Maximum von

$$\delta = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2} \quad (12)$$

in seiner Abhängigkeit vom Deviationswinkel β und der Strahlapertur α berechnet.⁸ In Abb. 3 sind die Werte des auf diese Weise bestimmten Auflösungsvermögens in Vielfachen von a , also die Größe δ/a in ihrer Abhängigkeit vom Deviationswinkel β mit der Apertur α als Parameter kurvenmäßig wiedergegeben. Abb. 4 gibt die Werte von δ unmittelbar in Millimeter, wenn man eine Halbwertsbreite von $a = 0.8$ mm — wie sie etwa in praktisch verwendeten Objektiven vorhanden ist — zugrunde legt. Abb. 5 zeigt zum Vergleich die für einen Wert $k^2 = 2.6$ des Parameters der Linsenstärke bestimmten Maximaldurchmesser der von den Zerstreuungsfiguren bedeckten Fläche. In Tabelle 1 werden diese Durchmesser in Abhängigkeit vom Deviationswinkel β für eine Reihe von Aperturwerten α für die beiden Linsenstärken $k^2 = 1.6$ und $k^2 = 2.6$ zahlenmäßig angegeben. Wählt man eine Apertur, wie sie hinsichtlich Öffnungsfehler und Elektronenbeugung für das Auflösungsvermögen bei idealer Zentrierung am günstigsten ist,⁹ so gilt

$$\alpha_m = 1.13 \sqrt[4]{\frac{\lambda}{C_\delta}}. \quad (13)$$

Für $C_\delta = B_2$ folgt aus (11) mit $a = 0.8$ mm der Wert $C_\delta = 0.35$ mm. Für eine Beschleunigungsspannung von 100 kV erhält man eine de Brogliesche Wellenlänge von $\lambda = 3.87 \cdot 10^{-9}$ mm. Mit diesen Werten ergibt sich als günstigste Apertur $\alpha_m = 1.15 \cdot 10^{-2}$. Verlangt man ein Auflösungsvermögen von mindestens 10^{-6} mm, so darf jedenfalls δ nicht größer als $5 \cdot 10^{-7}$ mm sein. Aus der Abb. 3 kann man entnehmen, daß für dieses erstrebte Auflösungsvermögen der Neigungswinkel β zwischen Objektiv- und Bündelachse höchstens $\beta = 1.5 \cdot 10^{-3}$ betragen darf.

Tab. 1. Grenze des Auflösungsvermögens, d. h. Bereich der auf das Objekt bezogenen Ausdehnung der Zerstreuungsfigur in der Gaußschen Bildebene in Abhängigkeit vom Winkel β zwischen Objektiv- und Bündelachse für verschiedene Aperturen α und die beiden Werte $k^2 = 1.6$ und $k^2 = 2.6$ der Linsenstärke.

$$k^2 = 2.6; a = 0.8 \text{ mm.}$$

$$\alpha = 10^{-3}.$$

β	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-4}$	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}
$\frac{\delta r}{a}$	$4.21 \cdot 10^{-10}$	$1.08 \cdot 10^{-9}$	$2.58 \cdot 10^{-9}$	$7.13 \cdot 10^{-8}$	$4.42 \cdot 10^{-7}$
δr	$3.36 \cdot 10^{-10}$	$8.62 \cdot 10^{-10}$	$2.06 \cdot 10^{-9}$	$5.70 \cdot 10^{-8}$	$3.54 \cdot 10^{-7}$

⁸ Die numerischen Rechnungen wurden dankenswerterweise von Herrn Dr. F. Krammer durchgeführt.

⁹ W. Glaser: Z. Phys. **121**, 647 (1943); vgl. auch B. v. Borries: Arch. Elektrotechn. im Erscheinen.

$$\alpha = 5 \cdot 10^{-3}.$$

$\frac{\delta r}{a}$	$4.18 \cdot 10^{-8}$	$5.26 \cdot 10^{-8}$	$6.84 \cdot 10^{-8}$	$3.22 \cdot 10^{-7}$	$1.10 \cdot 10^{-6}$
δr	$3.35 \cdot 10^{-8}$	$4.21 \cdot 10^{-8}$	$5.47 \cdot 10^{-8}$	$2.58 \cdot 10^{-7}$	$8.79 \cdot 10^{-7}$

$$\alpha = 10^{-2}.$$

$\frac{\delta r}{a}$	$3.25 \cdot 10^{-7}$	$3.65 \cdot 10^{-7}$	$4.21 \cdot 10^{-7}$	$1.08 \cdot 10^{-6}$	$2.58 \cdot 10^{-6}$
δr	$2.60 \cdot 10^{-7}$	$2.92 \cdot 10^{-7}$	$3.36 \cdot 10^{-7}$	$8.62 \cdot 10^{-7}$	$2.06 \cdot 10^{-6}$

$$\alpha = 5 \cdot 10^{-2}.$$

$\frac{\delta r}{a}$	$3.97 \cdot 10^{-5}$	$4.06 \cdot 10^{-5}$	$4.18 \cdot 10^{-5}$	$5.26 \cdot 10^{-5}$	$6.84 \cdot 10^{-5}$
δr	$3.17 \cdot 10^{-5}$	$3.25 \cdot 10^{-5}$	$3.35 \cdot 10^{-5}$	$4.21 \cdot 10^{-5}$	$5.47 \cdot 10^{-5}$

$$k^2 = 1.6; a = 0.8 \text{ mm.}$$

$$\alpha = 10^{-3}.$$

$\frac{\delta r}{a}$	$6.00 \cdot 10^{-10}$	$1.57 \cdot 10^{-9}$	$3.82 \cdot 10^{-9}$	$1.16 \cdot 10^{-7}$	$7.43 \cdot 10^{-7}$
δr	$4.80 \cdot 10^{-10}$	$1.26 \cdot 10^{-9}$	$2.90 \cdot 10^{-9}$	$0.93 \cdot 10^{-7}$	$5.94 \cdot 10^{-7}$

$$\alpha = 5 \cdot 10^{-3}.$$

$\frac{\delta r}{a}$	$5.90 \cdot 10^{-8}$	$7.50 \cdot 10^{-8}$	$9.85 \cdot 10^{-8}$	$4.78 \cdot 10^{-7}$	$1.68 \cdot 10^{-6}$
δr	$4.72 \cdot 10^{-8}$	$6.00 \cdot 10^{-8}$	$7.88 \cdot 10^{-8}$	$3.82 \cdot 10^{-7}$	$1.35 \cdot 10^{-6}$

$$\alpha = 10^{-2}.$$

$\frac{\delta r}{a}$	$4.57 \cdot 10^{-7}$	$5.18 \cdot 10^{-7}$	$6.00 \cdot 10^{-7}$	$1.57 \cdot 10^{-6}$	$3.82 \cdot 10^{-6}$
δr	$3.66 \cdot 10^{-7}$	$4.15 \cdot 10^{-7}$	$4.80 \cdot 10^{-7}$	$1.26 \cdot 10^{-6}$	$3.06 \cdot 10^{-6}$

$$\alpha = 5 \cdot 10^{-2}.$$

$\frac{\delta r}{a}$	$5.87 \cdot 10^{-5}$	$5.82 \cdot 10^{-5}$	$5.90 \cdot 10^{-5}$	$7.50 \cdot 10^{-5}$	$9.85 \cdot 10^{-5}$
δr	$4.46 \cdot 10^{-5}$	$4.57 \cdot 10^{-5}$	$4.72 \cdot 10^{-5}$	$6.00 \cdot 10^{-5}$	$7.88 \cdot 10^{-5}$

(Eingegangen am 20. Jänner 1948.)

Zulässigkeitsgrenzen für das Rechnen mit effektiven Komponenten, die größte mögliche Temperaturspitze.

Von R. Schön, Wien.

Mit 8 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Das Rechnen mit effektiven Komponenten,* eine Weiterbildung des Rechnens mit Effektivströmen für periodisch wiederkehrende Belastungen, erfährt eine Einschränkung durch die größte mögliche Temperaturspitze, die unzulässig hoch werden kann. Diese wird im Falle rechteckigen Belastungsverlaufes für zwei und mehr Verbraucher angegeben.

* Vgl. R. Schön: Zusammensetzung von Belastungsströmen unruhiger Verbraucher. Ingenieur-Arch. 1946, 3. Heft.

Der Fall zweier gleich großer „rechteckiger“ Belastungen gleicher relativer Einschaltdauer, jedoch verschiedener Spieldauer, wird an Hand von Tabellen und Kurven genauer erläutert. Es zeigt sich, daß das günstigste und ungünstigste Spieldauerverhältnis so nahe nebeneinanderliegen, daß in fast allen ungünstigen Fällen durch geringfügige Änderung der einen Spiel- oder Einschaltdauer eine wesentliche Herabsetzung der größten möglichen Temperaturspitze gelingt. Die ungünstigsten Fälle sind durch „Temperaturresonanzlinien“ gekennzeichnet, deren Lage in einfachster Weise bestimmt werden kann, so daß verschiedene Spieldauern gleicher Einschaltdauer sofort überblickt werden können. Werden Spiel- oder Einschaltdauer nicht genau eingehalten, so werden die Unterschiede der größten möglichen Temperaturspitzen vermindert. Näherungsformeln werden angegeben und mit der exakten Rechnung verglichen, periodische Belastungen beliebigen Verlaufes behandelt und unperiodische Belastungen besprochen. Auf die Möglichkeit einer technischen Verwertung sowohl der Steilheit des Temperaturanstieges unterhalb der höchsten Temperaturresonanzlinien, als auch der charakteristischen Lage dieser Linien wird hingewiesen.

Summary. Application of the calculus with effective components—a further development of the calculus with the effective value of currents with periodically recurrent loads—is limited by the peak temperature, which can reach an inadmissible value. This value is worked out for the case of two, or more, consumers, assuming a rectangular loading diagram. The case of two equal rectangular loads of equal relative switching-on time, but of different time-range, is treated in detail, with charts and diagrams. It turns out that the most favourable and the most unfavourable ratio of time ranges are so close together that, in nearly all of the unfavorable cases, it is possible to attain an essential reduction of the peak value of the temperature, by a slight modification of one of the time-ranges, or switching-on times. The most unfavourable cases are characterized by “resonance lines of temperature”, the position of which can be found easily, so that different time ranges of equal switching-time may be seen at a glance. If the time range, or the switching-on time, is not strictly observed, the differences between the maximum peak values of temperature are diminished. Approximate formulae are developed and compared with the exact calculation, and their practical application is discussed.

Résumé. Le calcul à composantes efficaces — dérivé du calcul à courants efficaces pour des charges relevant périodiquement — est limité par la température en pointe, qui peut atteindre une valeur inadmissible. Celle-ci est mise en évidence pour deux ou plusieurs consommateurs, en supposant un diagramme de chargement rectangulaire. Le cas de deux charges «rectangulaires», d'intensité et de durée pareilles, mais de période différente de la courbe de chargement, est traité en détail, avec tables et diagrammes à l'appui. Il en résulte que le rapport le plus favorable et le plus défavorable des courbes de chargement sont tellement près l'un de l'autre que, dans presque tous les cas défavorables, on arrive à réduire sensiblement la température en pointe, en modifiant légèrement l'une des périodes de la courbe de chargement, ou l'une des durées de charge. Les cas les plus défavorables sont caractérisés par des «lignes de résonance de température», dont la position peut être calculée facilement, de sorte que l'on peut voir, d'un seul coup d'œil, les avantages et désavantages de différentes périodes de la courbe de chargement, pour une même durée de charge. Si la période de cette courbe, ou la durée de charge, ne sont pas strictement observées, la différence entre les valeurs maxima des températures en pointe diminue. Des formules approximatives sont développées et confrontées avec le calcul exact, puis interprétées en vue de leur application pratique.

Inhaltsangabe. Für die Zusammensetzung von Belastungsströmen unruhiger Verbraucher gelten bekanntlich nicht die für stationäre Belastungsströme ausgearbeiteten Regeln. Der für die Speisung der Verbraucher maßgebende effektive Summenstrom kann jedoch mit Hilfe des Begriffes Pendelungsstrom in ähnlich einfacher Weise durch Komponentenzerlegung exakt zusammengesetzt werden wie die Summe phasenverschobener stationärer Wechselströme mit Hilfe des Begriffes Blindstrom. Darüber enthält ein im 3. Heft dieser Zeitschrift vom 3. 10. 1946 erschienener Aufsatz des Verfassers¹ ausführliche Angaben. Es ist darin erläutert, daß diese Zusammensetzung bei periodischen Belastungsströmen beliebigen Verlaufes wegen Resonanz der Oberwellen grundsätzlich gewissen Einschränkungen unterworfen ist, die jedoch praktisch kaum ins Gewicht fallen, weil die Spieldauer bei periodischen Verbrauchern zumeist nur mit großer Toleranz eingehalten wird. Eine praktisch wichtigere Einschränkung können bei unruhigen unperiodischen und besonders bei periodischen Verbrauchern die Temperaturspitzen erfordern, die durch das aufeinanderfolgende Zusammenfallen mehrerer Belastungsspitzen, bei periodischen Verbrauchern durch die im allgemeinen unvermeidlichen Schwebun-

¹ „Zusammensetzung von Belastungsströmen unruhiger Verbraucher“.

gen zwischen den verschiedenen Belastungsperioden zweier Verbraucher, hervorgerufen werden. Hinsichtlich dieser Einschränkung enthält der genannte Aufsatz keine endgültigen Angaben, weil darüber nicht durch Effektivwertbildung allein, sondern nur durch eingehende Untersuchungen über die größte mögliche Temperaturspitze entschieden werden kann. Diese ergänzenden Untersuchungen werden im vorliegenden Aufsatz beschrieben. Die in Kurvenform festgehaltene genaue Berechnung des praktisch wichtigsten Falles zweier „rechteckiger“ Belastungen gleicher Größe und Einschaltdauer, jedoch verschiedener Spieldauer bestimmt auch für den allgemeinen Fall von mehr als zwei „rechteckigen“ Belastungen, wo die Zulässigkeitsgrenzen für die Zusammensetzung der Belastungsströme unruhiger Verbraucher mit Hilfe der effektiven Komponenten liegen und in welchem Ausmaß die größte für die exakte Einhaltung der Spieldauer mögliche Temperaturspitze durch ungenaue Einhaltung der Spieldauer verändert, insbesondere herabgesetzt werden kann; sogar der Einfluß eines gegebenen größeren Schwankungsbereiches der Spieldauer kann auf Grund der angegebenen Kurven ziemlich genau geschätzt werden. Außerdem bildet die berechnete genaue Maximaltemperaturkurve eine brauchbare Unterlage für Näherungsformeln, mit deren Hilfe der planende Ingenieur sofort entscheiden kann, ob ein Belastungsfall zweifellos innerhalb der Zulässigkeitsgrenze liegt oder ob eine genauere Temperaturkontrolle, bzw. ein Sicherheitszuschlag erforderlich ist.

Das Rechnen mit den quadratischen Mittelwerten von Belastungsströmen beliebigen zeitlichen Verlaufes, die kurz effektive Ströme heißen mögen, gestattet die exakte Ermittlung der Stromleitungsverluste, solange die Temperaturveränderlichkeit des Leiterwiderstandes vernachlässigt werden kann, was für geringe Temperaturschwankungen im Enderwärmungszustand fast immer zutrifft. Auch für die Beurteilung der mittleren Endtemperatur gibt der effektive Strom für geringe Temperaturschwankungen einen exakten Maßstab. Bei größeren Temperaturschwankungen im Enderwärmungszustand bleibt die Genauigkeit des Maßstabes wohl praktisch ausreichend, die vorübergehende Überschreitung der mittleren Endtemperatur, die kurz als Temperaturspitze bezeichnet werden möge, kann jedoch zu einer Beschädigung des Isolationsmaterials führen. Die Angabe des effektiven Stromes reicht also für die Kennzeichnung des Enderwärmungszustandes nicht immer aus. Rechnen mit effektiven Strömen für die Temperaturkontrolle sind dem Zulässigkeitsgrenzen gesetzt, außerhalb welcher der exakt ermittelte effektive Strom für die Beurteilung des Enderwärmungszustandes nicht ausreicht.

Solche Zulässigkeitsgrenzen gibt es natürlich auch für das Rechnen mit effektiven Komponenten. Hier kommt ihnen insofern eine größere Bedeutung zu, als durch das Rechnen mit effektiven Komponenten die mühevoll graphische Addition vermieden wird, die Summenbelastungskurve, deren Anblick als Warnung dienen könnte, also nicht gezeichnet vorliegt. Die in der Inhaltsangabe angeführte Arbeit enthält wohl eine Faustformel, die angibt, für welche größte Belastungsperiode eine genauere Temperaturkontrolle schon mit Rücksicht auf die Bestimmungen des Elektrotechnischen Vereines für den Probelauf bei aussetzendem Betrieb (AB) und Dauerbetrieb mit aussetzender Belastung (DAB) überflüssig ist; das Zulässigkeitsbereich ist jedoch bedeutend größer, weil die Höhe der Temperaturspitzen nicht nur von der Dauer der längsten Schwebungsperiode, sondern auch vom Belastungsverlauf, also vor allem von der Amplitude der Pendelungsströme abhängig ist, so daß bei einer Einschaltdauer größer als 15%, also bei einem gleichförmigeren Belastungsverlauf, beträchtlich längere Belastungsperioden zugelassen werden können als 10 Minuten. Ferner wird zu beachten sein, daß die zulässigen Grenztemperaturen von Maschinen und Transformatoren im Fahrbetrieb (REB) noch wesentlich höher sind und daß daher selten auftretende Temperaturspitzen auch bei stabilen Maschinen und Transformatoren sinngemäß entsprechend höher sein dürfen.

Es wird also zunächst die auf die mittlere Endtemperatur bezogene Höhe der Temperaturspitzen zu bestimmen und dann mit den durch die Vorschriften des Elek-

trotechnischen Vereines gegebenen zulässigen Grenzerwärmungen unter Berücksichtigung ihrer Häufigkeit zu vergleichen sein.

1. Temperaturspitze eines periodischen Verbrauchers.

Wie in den Veröffentlichungen von Ölschlager² und Abt³ ausführlich erörtert ist, kann der Temperaturverlauf eines Verbrauchers, der mit gleichbleibendem Strom von der Einschaltdauer nach Abb. 1, also „rechteckig“ belastet ist, mit Hilfe der bekannten Differentialgleichung

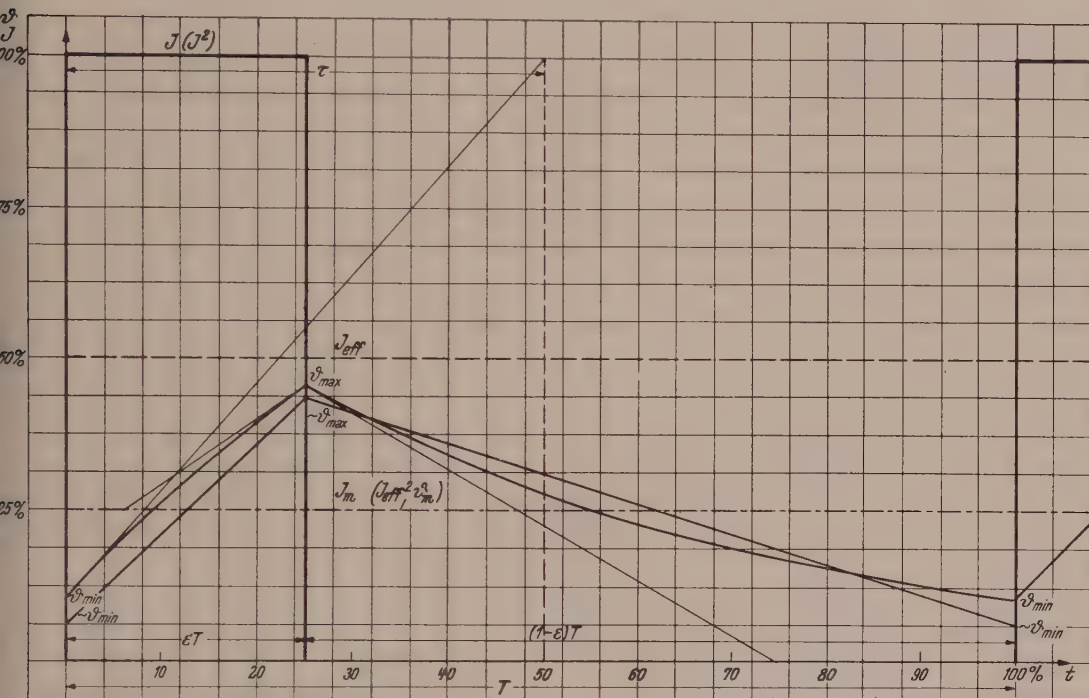


Abb. 1. Belastungs- und Temperaturverlauf. Kurve $\vartheta_{min} \vartheta_{max} \vartheta_{min}$ nach Gl. (2) und (2 a);
Kurve $\sim \vartheta_{min} \sim \vartheta_{max} \sim \vartheta_{min}$ nach Gl. (13).

$$V(t) = \Lambda (\vartheta_i - \vartheta_a) + K \frac{d\vartheta}{dt}, \quad (1)$$

deren allgemeine Lösung lautet:

$$\vartheta_i = e^{-\frac{\Lambda}{K}t} \left\{ C + \frac{1}{K} \int [V(t) + \Lambda \vartheta_a] e^{\frac{\Lambda}{K}t} dt \right\}, \quad (1a)$$

wobei $\tau = \frac{K}{\Lambda}$ die Zeitkonstante bedeutet, für den Enderwärmungszustand bestimmt werden zu

$$(\vartheta_i - \vartheta_a)_z = \frac{V_1}{\Lambda} \left[1 - \frac{1 - e^{-\frac{(1-\epsilon)T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{t_1}{\tau}} \right] \text{ für die Temperaturzunahme } (0 < t_1 < \epsilon T), \quad (2)$$

² ETZ 1900, H. 51, S. 1058.

³ ETZ 1943, H. 23/24, S. 316.

$$(\vartheta_i - \vartheta_a)_a = \frac{V_1}{A} \frac{1 - e^{-\frac{\varepsilon T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} e^{-\frac{t_2}{\tau}} \text{ für die Temperaturabnahme} \quad (0 < t_2 < (1 - \varepsilon) T. \quad (2a)$$

Darin bedeutet:

- t = die Zeit in Sekunden,
- T = Spieldauer in Sekunden,
- $t_{1(2)}$ = die Zeit in Sekunden vom Einschalt- (Ausschalt-) Zeitpunkt gezählt,
- ϑ_a = die Temperatur in Grad C des Kühlmittels,
- ϑ_i = „ „ „ „ C des Wärmeerzeugers,
- A = die Wärmeableitung je Grad C und Sekunde,
- K = die Wärmekapazität des Wärmeerzeugers,
- $V(t)$ = den zeitlichen Verlauf der Verlustwärme,
- V_1 = Verlustwärme während der Einschaltdauer ε .

Durch Gl. (2) wird die Temperaturspitze für einen Verbraucher bestimmt zu:

$$(\vartheta_i - \vartheta_a)_{\max} = \frac{V_1}{A} \frac{1 - e^{-\frac{\varepsilon T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} = \frac{\vartheta_m}{\varepsilon} \frac{1 - e^{-\frac{\varepsilon T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}, \quad (3)$$

wenn $\vartheta_m = (\vartheta_i - \vartheta_a)_m = \frac{\varepsilon V_1}{A}$ die Enderwärmung für die mittlere Verlustleistung εV_1 bedeutet.

Der Temperaturverlauf nach Gl. (2) und (2a) ist in Abb. 1 eingetragen. Der Temperaturmaßstab ist so gewählt, daß ϑ_m mit εV_1 zusammenfällt. Man erkennt, daß die Temperaturkurve als Abbildung der Verlustkurve aufgefaßt werden kann. Sie möge phasenverschobene Abbildung heißen, weil sie nach denselben Gesetzen zustande kommt, nach denen ein phasenverschobener Strom die aufgedrückte Spannung abbildet.

Während Ölschläger den Wert der höchsten zulässigen Temperaturspitze mit der Enderwärmung im Dauerbetrieb gleichsetzt und auf dieser Grundlage eine Kurvenschar der höchstzulässigen Leistung bei verschiedener Einschaltdauer angibt, soll nunmehr im Sinne der Probelaufvorschriften des Elektrotechnischen Vereines ein Unterschied zwischen der höchstzulässigen Spitztemperatur und der höchstzulässigen Temperatur im Dauerbetrieb, also der höchstzulässigen mittleren Endtemperatur gemacht werden. Der Unterschied zwischen diesen beiden Werten ergibt sich beispielsweise für 15% Einschaltdauer, eine Zeitkonstante $\tau = 30$ Minuten und die für den Probelauf vorgeschriebene Spieldauer von 10 Minuten zu etwa 5% der mittleren Enderwärmung; für seltene Temperaturspitzen können die erwähnten Vorschriften für Bahnen sinngemäß herangezogen werden. In Abb. 2 ist eine Kurvenschar gezeichnet, in der die Temperaturspitze in Vielfachen der mittleren Endtemperatur als Funktion der Einschaltdauer für die bezogenen Spieldauern $\frac{T}{\tau} = 1/3, 2/3, 1, 2$ und 4 aufgetragen ist. Die strichlierten Linien und die Kurve „Fehler = 0“ beziehen sich auf eine einfache Näherungsformel, die im 5. Abschnitt besprochen wird. Die Kurven $\vartheta \left(\frac{T}{\tau} \right)$ für 15, 25 und 40% Einschaltdauer zeigen, daß die Temperaturspitze praktisch proportional der bezogenen Spieldauer zunimmt. Für beispielsweise 25% Einschaltdauer ist die Linie zunächst schwach konkav nach oben, hierauf konvex nach oben; der Wendepunkt liegt etwa bei $\frac{T}{\tau} = 2$. Aus dieser Kurvenschar könnte jene von Ölschläger ermittelt werden, wenn die zulässige Spitztemperatur bei abgesetztem Betrieb der

zulässigen Enderwärmung im Dauerbetrieb gleichgesetzt und die höchstzulässige Absatzleistung in Vielfachen der Dauerleistung ausgedrückt werden würde.

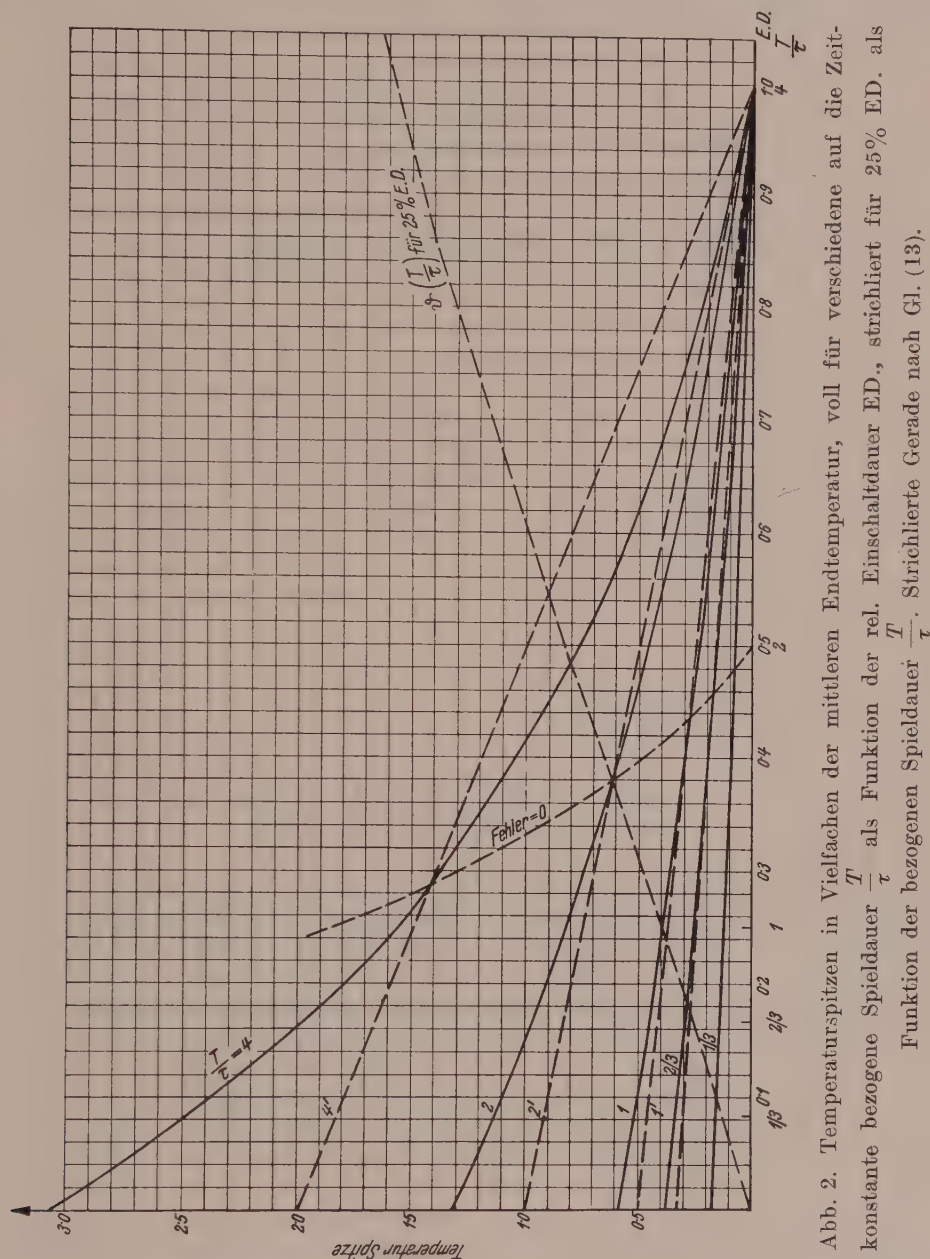


Abb. 2. Temperaturspitzen in Vielfachen der mittleren Endtemperatur, voll für verschiedene auf die Zeit-konstante bezogene Spieldauer $\frac{T}{\tau}$ als Funktion der rel. Einschaltdauer ED., strichliert für 25% ED., als Funktion der bezogenen Spieldauer $\frac{T}{\tau}$. Strichlierte Gerade nach Gl. (13).

Die Trennung der beiden Temperaturanteile ist jedoch für die beabsichtigte Summation wichtig. Die mittlere Endtemperatur ist dem effektiven Strom, die Temperaturspitze dem Pendelungsstrom zugeordnet.

2. Temperaturspitze von zwei und mehr periodischen Verbrauchern.

Bezeichnen $i_1(t)$ und $i_2(t)$ die periodischen Belastungsströme zweier unruhiger Verbraucher nach Abb. 1, so betragen die Kupferverluste in der gemeinsamen Zu-leitung $V = \rho [i_1(t) + i_2(t)]^2$.

$\cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ zu berücksichtigen, die ein Belastungsverlauf nach Abb. 3 mit der Spieldauer $m T_1 = n T_2$ zur Folge hat. Den Kombinationsverlusten entspricht ein „Kombinations“-Temperaturverlauf. Werden diese drei Temperaturkurven so addiert, daß sie den größten möglichen Wert ergeben, so erhält man die größte mögliche Spitztemperatur, die auf die mittlere Endtemperatur nach (4a) zu beziehen ist.

Schreibt man Gl. (3) in der gekürzten Form

$$\vartheta_{\max} = \frac{\vartheta_m}{\varepsilon} \bar{\vartheta}_{\max},$$

wobei

$$\frac{\vartheta_m}{\varepsilon} = \frac{V_1}{A} \quad \text{und} \quad \bar{\vartheta}_{\max} = \frac{1 - e^{-\frac{\varepsilon T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}}$$

bedeutet, so beträgt nach obigem die Höchsttemperatur

$$\vartheta = \vartheta_{\max 1} + \vartheta_{\max 2} + 2 \vartheta_k = \frac{\vartheta_{m1}}{\varepsilon_1} \bar{\vartheta}_{\max 1} + \frac{\vartheta_{m2}}{\varepsilon_2} \bar{\vartheta}_{\max 2} + \sqrt{\frac{\vartheta_{m1} \vartheta_{m2}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \cdot 2 \bar{\vartheta}_k, \quad (5)$$

wobei

$$\begin{aligned} 2 \bar{\vartheta}_k = & 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=p} \frac{\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon_0 T_2}{\tau}}\right) e^{-\frac{m_{0\lambda} T_2}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{n T_2}{\tau}}} + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=q} \frac{\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon_{1\mu} T_2}{\tau}}\right) e^{-\frac{m_{1\mu} T_2}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{n T_2}{\tau}}} + \\ & + 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=r} \frac{\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon_{2\nu} T_2}{\tau}}\right) e^{-\frac{s_{2\nu} T_1}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{n T_2}{\tau}}} \end{aligned} \quad (5a)$$

bedeutet. Die Bezeichnungen der Gl. (5a) sind in Abb. 3 eingetragen. Die Abbildung zeigt folgende Werte: $\varepsilon_0 = 0.25$, $\varepsilon_1 = 0.05$, $m_{01} = 2$, $m_1 = 4$; außerdem muß $m_{00} = 0$ eingesetzt werden, weil auch an dieser Stelle eine Überdeckung stattfindet. Der Faktor

$e^{-\frac{m_\nu T_2}{\tau}}$ bedeutet, daß nicht die Höchsttemperatur, sondern die Temperatur des absteigenden Astes nach Gl. (2a) einzusetzen ist. Gl. (5a) kann als wiederholte Anwendung der Gl. (2a) aufgefaßt werden, weil diese für $t_2 = 0$ auch die Höchsttemperatur bestimmt. Da die Höchsttemperatur immer am Ende der Belastung auftritt, ist entsprechend Abb. 3 nicht mit $m_2 = 9$, sondern mit $(m_2 + \varepsilon_0 - \varepsilon_2) T_2 = s_2 T_1$ zu rechnen; bei dieser Art der Überdeckung ist die „steuernde Kante“ kein ganzzahliges Vielfaches von T_2 , sondern von T_1 . In Abb. 3 beträgt $s_2 = 5$.

$$\frac{d\vartheta}{dT_2} = \kappa \sum_{\vartheta_{m_0}=\vartheta_0}^{\vartheta_{m_0}=\vartheta_{m_0k}} \frac{d\vartheta_{m_0k}}{dT_2} + \lambda \sum_{\vartheta_{m_1}=\vartheta_{m_{11}}}^{\vartheta_{m_1}=\vartheta_{m_{1l}}} \frac{d\vartheta_{m_{1l}}}{dT_2} + \mu \sum_{\vartheta_{m_2}=\vartheta_0}^{\vartheta_{m_2}=\vartheta_{m_2m}} \frac{d\vartheta_{m_2m}}{dT_2}; \quad \frac{d\vartheta_m}{dT_2} = \frac{d\vartheta_m(T_2 + \Delta T_2)}{d\Delta T_2} \lim_{\Delta T_2 \rightarrow 0}$$

$$\vartheta_{m0}(T_2 + \Delta T_2) = \frac{V}{A} \frac{\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon_0}{\tau}(T_2 + \Delta T_2)}\right) e^{-\frac{m_0}{\tau}(T_2 + \Delta T_2)}}{1 - e^{-\frac{n}{\tau}(T_2 + \Delta T_2)}};$$

$$\frac{d\vartheta_{m0}}{dT_2} = \frac{V}{A} \frac{e^{-\frac{m_0 T_2}{\tau}}}{\tau \left(1 - e^{-\frac{n T_2}{\tau}}\right)} \left[(m_0 + \varepsilon_0 + \beta) e^{-\frac{\varepsilon_0 T_2}{\tau}} - \beta \right];$$

$$\vartheta_{m1}(T_2 + \Delta T_2) = \frac{V}{A} \left[\frac{e^{-\frac{m_1}{\tau}(T_2 + \Delta T_2)}}{1 - e^{-\frac{n}{\tau}(T_2 + \Delta T_2)}} - \frac{e^{-\frac{\varepsilon_1}{\tau}(T_2 + \Delta T_2)} e^{-\frac{m_1 T_2}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{n}{\tau} T_2}} \right];$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta_{m_1}}{dT_2} &= \frac{V}{A} \frac{e^{-\frac{m_1 T_2}{\tau}}}{\tau \left(1 - e^{-\frac{n T_2}{\tau}}\right)} \left[\varepsilon_1 e^{-\frac{\varepsilon_1 T_2}{\tau}} - m_1 - \beta \right]; \\ \vartheta_{m_2}(T_2 + \Delta T_2) &= \frac{V}{A} \left[\frac{e^{-\frac{(m_2 + \varepsilon_0 - \varepsilon_2)(T_2 + \Delta T_2)}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{n}{\tau}(T_2 + \Delta T_2)}} - \frac{e^{-\frac{(m_2 + \varepsilon_0)(T_2 + 2\Delta T_2)}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{n}{\tau}(T_2 + 2\Delta T_2)}} \right]; \\ \frac{d\vartheta_{m_2}}{dT_2} &= \frac{V}{A} \frac{1}{\tau \left(1 - e^{-\frac{n T_2}{\tau}}\right)} \left[-(m_2 + \varepsilon_0 - \varepsilon_2 + \beta) e^{-\frac{(m_2 + \varepsilon_0 - \varepsilon_2) T_2}{\tau}} + \right. \\ &\quad \left. + 2(m_2 + \varepsilon_0 + \beta) e^{-\frac{(m_2 + \varepsilon_0) T_2}{\tau}} \right].\end{aligned}$$

Für $m_v = 0$ ergibt sich ϑ_0 nach aufwärts als ϑ_{m_0} ;

$$\frac{d\vartheta_{00}}{dT_2} = \frac{V}{A} \frac{1}{\tau \left(1 - e^{-\frac{n T_2}{\tau}}\right)} \left[(\varepsilon_0 + \beta) e^{-\frac{\varepsilon_0 T_2}{\tau}} - \beta \right].$$

Für $m_v = 0$ ergibt sich ϑ_0 nach abwärts als ϑ_{m_2} , wobei $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$ ist;

$$\frac{d\vartheta_{0u}}{dT_2} = \frac{V}{A} \frac{1}{\tau \left(1 - e^{-\frac{n T_2}{\tau}}\right)} \left[-\beta + 2(\varepsilon_0 + \beta) e^{-\frac{\varepsilon_0 T_2}{\tau}} \right].$$

Rückt m_0 an den linken Rand der anderen Belastung, so wird es nach abwärts zu m_2 ; rückt m_0 an den rechten Rand der anderen Belastung, so wird es nach aufwärts zu m_1 ; rückt m_2 an den linken Rand der anderen Belastung, so wird es nach aufwärts zu m_0 usw.: bei Kantenkoinzidenz ergeben sich nach oben und unten verschiedene $\frac{d\vartheta}{dT_2}$; da ϑ_0 immer vorkommt und links koinzidiert, ist $\frac{d\vartheta}{dT_2}$ nach aufwärts im allgemeinen anders als nach abwärts.

Durch das Summenzeichen wurde angedeutet, daß von jedem Überdeckungstypus mehr als ein Stück vorhanden sein kann. Im einfachsten Falle muß nur $m_{00} = 0$ vorkommen, $p = q = r$ können 0 sein. In diesem Falle beschränkt sich die Kombinationstemperatur auf einen einzigen Summand, der sich von $\vartheta_{\max 2}$ wenigstens dadurch unterscheidet, daß $n > 1$ ist. Für $T_2 = T_1$ wird $\bar{\vartheta}_{\max 1} = \vartheta_{\max 2} = \bar{\vartheta}_k$.

Die Höchsttemperatur nach (5) muß erst durch ϑ_m dividiert werden, um sie in Vielfachen von ϑ_m ausdrücken zu können; die bezogene Höchsttemperatur beträgt also

$$\bar{\vartheta}_2 = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_m} = \frac{\frac{\vartheta_{m_1}}{\varepsilon_1} \bar{\vartheta}_{\max 1} + \frac{\vartheta_{m_2}}{\varepsilon_2} \bar{\vartheta}_{\max 2} + \sqrt{\frac{\vartheta_{m_1} \vartheta_{m_2}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} 2 \bar{\vartheta}_k}{\vartheta_{m_1} + \vartheta_{m_2} + 2 \sqrt{\vartheta_{m_1} \vartheta_{m_2} \varepsilon_1 \varepsilon_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (6)$$

Unterscheiden sich die beiden Belastungen nur durch die Spieldauer, so vereinfacht sich (5) zu

$$\bar{\vartheta}_2 = \frac{\bar{\vartheta}_{\max 1} + \bar{\vartheta}_{\max 2} + 2 \bar{\vartheta}_k}{2 \varepsilon (1 + \varepsilon)}. \quad (6a)$$

Für n Verbraucher erhält man allgemein

$$\bar{\vartheta}_n = \frac{\sum \frac{\vartheta_{m_v}}{\varepsilon_v} \bar{\vartheta}_{\max v} + \sum \sqrt{\frac{\vartheta_{m_\mu} \vartheta_{m_v}}{\varepsilon_\mu \varepsilon_v}} \bar{\vartheta}_{k\mu v}}{\sum \vartheta_{m_v} + \sum \sqrt{\vartheta_{m_\mu} \vartheta_{m_v} \varepsilon_\mu \varepsilon_v} \cos(\varphi_\mu - \varphi_v)}. \quad (7)$$

Unterscheiden sich die Belastungen nur durch die Spieldauer, so wird

$$\bar{\vartheta}_n = \frac{\sum \bar{\vartheta}_{\max v} + \sum \bar{\vartheta}_{k\mu v}}{n \varepsilon [1 + (n-1) \varepsilon]}. \quad (7a)$$

Wird $\Sigma \bar{\vartheta}_{\max \nu} = n \bar{\vartheta}_{\max m}$; $\Sigma \bar{\vartheta}_{k \mu \nu} = n(n-1) \bar{\vartheta}_{k m}$ gesetzt, so erhält man

$$\bar{\vartheta}_n = \frac{[\bar{\vartheta}_{\max m} + (n-1) \bar{\vartheta}_{k m}]}{\varepsilon [1 + (n-1) \varepsilon]},$$

was für ∞ viele Verbraucher den Grenzwert ergibt:

$$\bar{\vartheta}_\infty = \frac{\bar{\vartheta}_{k m}}{\varepsilon^2}. \quad (8)$$

Unmittelbar aus (7) erhält man für ∞ viele Verbraucher

$$\bar{\vartheta}_\infty = \frac{\mu \nu \sum \sqrt{\frac{\vartheta_{m \mu} \vartheta_{m \nu}}{\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu}} \bar{\vartheta}_{k \mu \nu}}{\mu \nu \sum \sqrt{\vartheta_{m \mu} \vartheta_{m \nu} \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu} \cos(\varphi_\mu - \varphi_\nu)}, \quad (8a)$$

was für $\frac{\vartheta_{m \mu}}{\varepsilon_\mu} = \frac{\vartheta_{m \nu}}{\varepsilon_\nu} = \frac{V_\nu}{A}$, also für gleiche Ströme oder Verluste, ergibt:

$$\bar{\vartheta}_\infty = \frac{\mu \nu \sum \bar{\vartheta}_{k \mu \nu}}{\mu \nu \sum \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \cos(\varphi_\mu - \varphi_\nu)}. \quad (8b)$$

Man sieht, daß es bei sehr zahlreichen Verbrauchern für die größte mögliche Temperaturspitze nicht auf die Höchsttemperatur $\vartheta_{\max}$ der einzelnen Verbraucher, sondern nur auf die Summe der Kombinationstemperaturen $2 \vartheta_k$ sämtlicher Verbraucherpaare ankommt; die mittlere Endtemperatur, auf die diese Höchsttemperatur zu beziehen ist, kann in diesem Falle aus den mittleren Strömen allein ermittelt werden. Diese Beziehung gilt für jeden beliebigen, sogar für jeden nicht periodischen Belastungsverlauf; allerdings würde in diesem allgemeinsten Fall die Bildung und Summierung der Kombinationstemperaturen einige Schwierigkeiten bereiten. Allgemein gilt jedoch, daß sich ein hinzutretender unruhiger Verbraucher in einem großen Netz fast nur mit der Summe aller hinzutretenden Kombinationstemperaturen, nicht aber mit seiner eigenen Höchsttemperatur auswirkt. Für die Praxis bedeutet dies, daß vor allem zu untersuchen ist, ob besonders ungünstig gelegene Kombinationstemperaturen zu befürchten sind. Es handelt sich um eine ähnliche Resonanzkontrolle, wie sie aus mechanischen Gründen bei mehreren ungleichförmig angetriebenen Synchronmaschinen gebräuchlich ist.

3. Die Kombinationstemperatur.

a) Für periodischen rechteckigen Belastungsverlauf.

Die Kombinationstemperatur ist also nicht nur für zwei gemeinsam gespeiste, sondern in noch höherem Maße für mehr als zwei und für beliebig viele gemeinsam gespeiste unruhige Verbraucher von Wichtigkeit. Die drei Summen (5a) gestatten nicht, ihren Verlauf, etwa in Abhängigkeit vom Spieldauerverhältnis $T_2 : T_1$ für eine bestimmte bezogene Zeitkonstante $\frac{\tau}{T}$ ohne genaue Rechnung abzuschätzen. Dieser Verlauf, dessen erste Ableitung unstetig ist, wurde daher mit Hilfe siebenstelliger Logarithmen ziemlich genau ermittelt und in die Tabelle 1 und Abb. 4 (a und b) eingetragen. Eine Auswahl der gerechneten Werte ist in Tabelle 1 enthalten. Beide gelten für $\varepsilon = 0.25$ und $\frac{\tau}{T_1} = 2.4$, also für eine Zeitkonstante gleich der 2.4fachen (längeren) Spieldauer T_1 , ferner für gleiche Stromamplitude. Die Größe der Spieldauer T_1 ist beliebig und in der Abbildung mit 100% bezeichnet, was beispielsweise 100 s bedeuten kann. Dann gilt die voll ausgezogene „Haupt“-Kurve für $\tau = 240$ s. Ein Stück der Hauptkurve ist noch gezeichnet für $\frac{\tau}{T} = 2\frac{2}{3}$ und 3, je ein Punkt davon für $\frac{\tau}{T} = 3\frac{3}{7}$ und 4 und eine größere Anzahl von Resonanzlinien für $\frac{\tau}{T} = \infty$, also für sehr kurze Be-

Abb. 4a und b. Höchste mögliche Kombinationstemperatur als Funktion der rel. Spieldauer für zwei Belastungen von verschiedener Spieldauer, rechteckigem Verlauf, 25% Einschaltdauer, auf 100% Spieldauer bezogener Zeitkonstante $\frac{\tau}{T} = 2.4$ und ∞ .

Maßstab der Temperaturspitzen in % der mittleren Enderwärmung ist eingetragen.

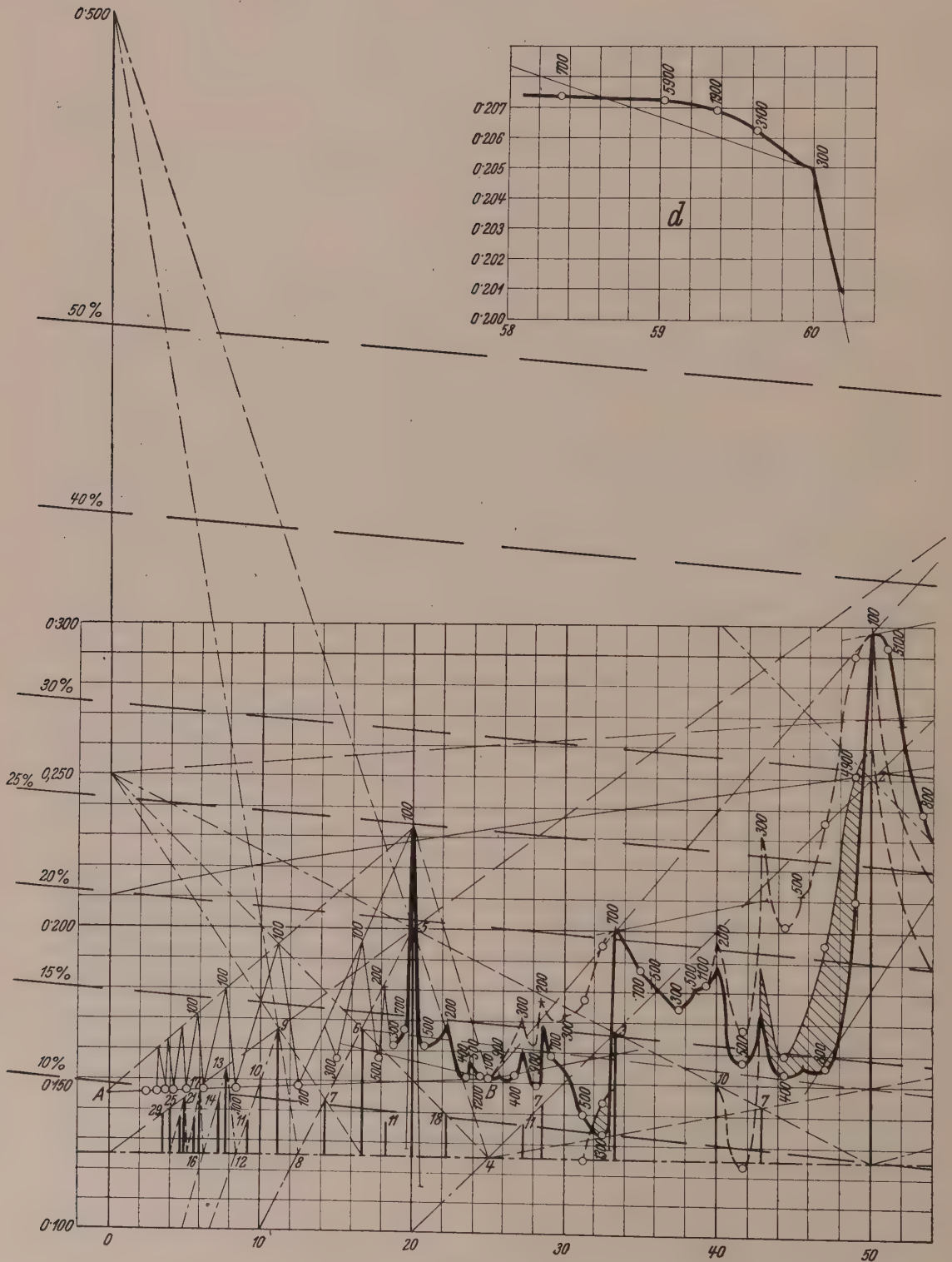


Abb. 4 a.

- Hauptkurve für mehr als 2 Verbraucher
 ——— Reduzierte Gegenkurve für 2 Verbraucher
 - - - - - Gegenkurve für 2 Verbraucher
 a Größte Temperatur für langsamen Verbraucher
 b " " " schnelleren " "
 c " " " langsamen " "
 vermindert entsprechend entgegengesetzter Anordnung

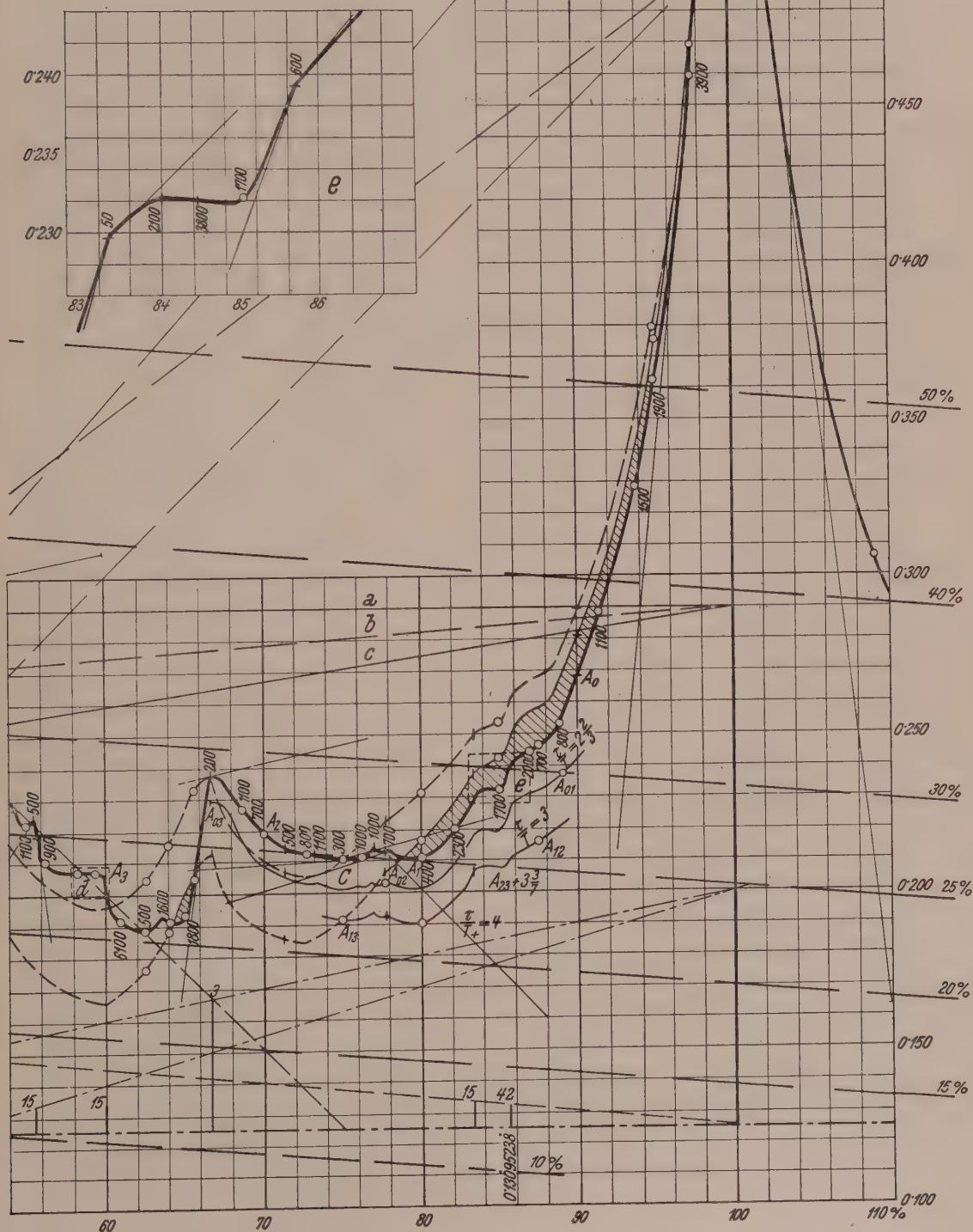


Abb. 4 b.

Tabelle 1. Bezogene größtmögliche Kombinationstemperaturen.

$$\varepsilon = 0.25; \frac{\tau}{T} = 2.4.$$

$\frac{T_2}{T_1}$ %	Hauptwert	Gegenwert	Reduzierter Wert	$\frac{T_1 T_2}{\mu}$ %	$\frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$ %	Wert für $\frac{\tau}{T} = \infty$	Nr. <i>n</i>
100	0.580614	0.580614	0.580614	100		0.5	1
97 ¹ / ₂	0.459313	0.469165	—	3900	3900	0.125	
95	0.362781	0.379132	0.375426	1900	1900	0.125	
93 ³ / ₄	0.328818	—	—	1500	1500	0.125	
91 ¹ / ₃	0.288669	—	—	1100	1100	0.125	
90	0.267387	0.289111	0.281680	900	900	0.127	
88 ⁸ / ₉	0.253080	—	—	800	800	0.125	
87 ¹ / ₂	0.245960	—	—	700	700	0.125	
86 ²² / ₂₃	0.243940	—	—	2000	666 ² / ₃	0.125	
85 ⁵ / ₇	0.239389	—	—	600	600	0.13095238	42
85	0.232243	0.253225	0.242049	1700	566 ² / ₃	0.125	
84 ⁴ / ₉	0.232014	—	—	3800	542 ⁶ / ₇	0.1251462	
84	0.232207	—	—	2100	525	0.12571428	
83 ¹ / ₃	0.229597	0.249162	0.236733	500	500	0.13	15
82 ¹ / ₇	0.219488	—	—	2300	460	0.125	
81 ⁹ / ₁₁	0.217635	—	—	900	450	0.126	
80	0.210548	0.231367	0.216427	400	400	0.125	
77 ⁷ / ₉	0.212522	0.223161	0.206541	700	350	0.126984	
76 ¹² / ₁₃	0.213396	—	—	1000	333 ¹ / ₃	0.12692307	
76 ⁴ / ₂₁	0.211681	—	—	1600	320	0.125	
75	0.210656	0.210656	0.191932	300	300	0.125	
73 ¹ / ₃	0.212604	—	—	1100	275	0.127	
72 ⁸ / ₁₁	0.212755	—	—	800	266 ² / ₃	0.125	3
71 ³ / ₇	0.214314	—	—	500	250	0.1285714	
70	0.210548	—	—	700	233 ¹ / ₃	0.12571428	
68 ³ / ₄	0.226412	—	—	1100	220	0.125	
66 ² / ₃	0.237311	0.237311	0.212236	200	200	0.16	
65 ⁵ / ₈	0.204569	0.232550	0.206677	2100	190 ¹⁰ / ₁₁	0.125	
65	0.193108	—	—	1300	185 ⁵ / ₇	0.125	
64	0.190960	0.215738	0.188619	1600	177 ⁷ / ₉	0.125	
63 ⁷ / ₁₁	0.193336	—	—	700	175	0.129870	
62 ¹ / ₂	0.188363	0.204419	0.176148	500	166 ² / ₃	0.125	15
61	0.191718	—	—	6100	156 ¹⁶ / ₃₉	0.125	
60	0.204885	0.196017	0.165651	300	150	0.13	
59 ⁸ / ₁₃	0.206209	—	—	3100	147 ¹³ / ₃₁	0.125	
59 ³ / ₈	0.206894	—	—	1900	146 ² / ₁₃	0.125	
59	0.207198	—	—	5900	143 ³⁷ / ₄₁	0.125	
58 ¹ / ₃	0.207345	0.184243	—	700	140	0.125	
56 ¹ / ₄	0.210257	—	—	900	128 ⁴ / ₇	0.125	
55 ¹⁵ / ₁₇	0.218127	—	—	1900	126 ² / ₃	0.125386997	
55 ⁵ / ₉	0.224677	—	—	500		0.13	15
55	0.223048	—	—	1100		0.125	
54 ⁶ / ₁₁	0.226413	—	—	600		0.1287	
53 ¹ / ₃	0.238746	—	—	800		0.125	

$\frac{T_2}{T_1}$ %	Hauptwert	Gegenwert	Reduzierter Wert	$\frac{T_1 T_2}{\mu}$ %	$\frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}$ %	Wert für $\frac{\tau}{T} = \infty$	Nr. <i>n</i>
52	0·267469	—	—	1300		0·12515384	
51	0·292796	—	—	5100		0·125	
50	0·2978655	0·2978655	0·2599228	100	100	0·250	2
49	0·209997	0·289843	0·251050	4900		0·125	
47 ¹ / ₁₇	0·154721	0·235656	0·195419	800		0·125	
45 ⁵ / ₁₁	0·156045	0·211328	0·169837	500		0·127	
44 ⁴ / ₉	0·153306	0·201641	0·159359	400		0·125	
42 ⁶ / ₇	0·172501	0·231036	0·187510	300		0·142857	7
41 ² / ₃	0·157155—	0·167567	—	500		0·125	
40	0·188595—	0·195540—	0·149768—	200	66 ² / ₃	0·15	
39 ² / ₇	0·182167	—	—	1100		0·125	
38 ⁶ / ₁₃	0·181080	—	—	500		0·1307692	65
37 ¹ / ₂	0·174585 +	—	—	300		0·125	
35 ⁵ / ₇	0·183012—	—	—	500		0·1285714	
35	0·186772 +	—	—	700		0·125	
33 ¹ / ₃	0·200296	0·200296	0·149260	100		0·16	3
32 ¹ / ₂	0·132674	0·194991	0·143294	1300		0·125	
31 ¹ / ₄	0·139904	0·176972	0·124284	500		0·125	
30	0·157244	0·172531	—	300	42 ⁶ / ₇	0·125	
29 ¹ / ₆	0·158658	—	—	700		0·125	
28 ⁴ / ₇	0·168155—	0·176300	—	200		0·142857	7
28 ¹ / ₈	0·148936—	—	—	900		0·125	
27 ³ / ₁₁	0·159983—	0·169785—	—	300		0·136	11
26 ² / ₃	0·152032	—	—	400		0·125	
25	0·150872—	—	—	100	33 ¹ / ₃	0·125	4
23 ¹⁷ / ₂₁	0·156413	—	—	500		0·1285714	
23 ⁹ / ₁₇	0·151316	—	—	400		0·125	
22 ² / ₉	0·168993 +	—	—	200		0·138	18
20 ⁵ / ₆	0·161298—	—	—	400	25	0·125	
20	0·2323465	0·2323465	0·1666433	100		0·2	5
19 ⁴ / ₉	0·166753	—	—	700		0·125	
18 ³ / ₄	0·161256	—	—	300		0·125	
18 ² / ₁₁	0·180758	—	—	200		0·136	11
17 ⁶ / ₇	0·157380	—	—	500		0·125	
16 ² / ₃	0·1952566	—	—	100		0·16	6
15	0·1568161	—	—	300	17 ¹¹ / ₁₇	0·125	
12 ¹ / ₂	0·1480020	—	—	100		0·125	8
11 ¹ / ₉	0·1935908	—	—	100		0·16	9
8 ¹ / ₃	0·1470492	—	—	100		0·125	12
7 ⁹ / ₁₃	0·1786838—	—	—	100		0·153846	13
6 ¹ / ₄	0·1465741	—	—	100		0·125	16
5 ¹⁵ / ₁₇	0·1707927	—	—	100		0·147058823	17
5	0·1462890—	—	—	100	5 ⁵ / ₁₉	0·125	20
4	0·1625912—	—	—	100	4 ¹ / ₆	0·14	25
2 ¹ / ₂	0·1457252 +	—	—	100	0	0·125	40
0	0·1451536—	—	—				

lastungsperioden. Für die Zeitkonstante 0 würde die gezeichnete Kombinationstemperatur $2 \bar{\vartheta}_k$ für jedes Spieldauerverhältnis 2 betragen. Für $\frac{\tau}{T} = \infty$ schrumpfen die Temperaturspitzen zu Resonanzlinien zusammen; zwischen diesen ist die höchste Kombinationstemperatur gleich der mittleren Kombinationstemperatur, sie beträgt also $2 \bar{\vartheta}_k = 2 \varepsilon^2 = 0.125$. Es ist ungewohnt, daß sich für die größte Zeitkonstante die plötzlichsten Temperatursprünge, für die kleinste Zeitkonstante 0 aber ein stetiger Linienzug, nämlich eine horizontale Gerade im Abstand 2 ergibt. Es ist jedoch zu beachten, daß die Hauptkurve keinen zeitlichen Ablauf, sondern einen Schnitt durch die höchsten Gipfel eines Temperaturgebirges darstellt, dessen zeitlicher Ablauf senkrecht zur Bildebene zu denken ist. Daß der zeitliche Temperaturverlauf bei geringerer Zeitkonstante steiler ist als bei größerer, kommt in der Hauptkurve nicht unmittelbar zum Ausdruck. Mittelbar kann es daraus geschlossen werden, daß die Kurve für $\frac{\tau}{T} = 2.4$, die über der Kurve $\frac{\tau}{T} = 3$ liegt, einem zeitlichen Temperaturverlauf entspricht, der in gleicher Zeit höhere Maxima erreicht, somit steiler verläuft. Die Zeitkonstante $\frac{\tau}{T} = 2.4$ wurde gewählt, weil kleine Hebezeugmotoren eine Zeitkonstante von etwa 30 Minuten haben, was für die Spieldauer, die der VDE für den Probelauf mit 10 Minuten vorschreibt, einer zulässigen kleinsten Zeitkonstanten $\frac{\tau}{T} = 3$ entsprechen würde: Die Hauptkurve betrifft also Vorgänge, die länger dauern als der Probelauf und daher zu Temperaturspitzen führen, die überwiegend nicht mehr zulässig sind. Sie gestattet daher, auch jene Fälle zu beurteilen, in denen die zulässige Höchsttemperatur überschritten wird.

Der Summenbelastungsverlauf nach Abb. 3 ist so gezeichnet, daß die Zeit von rechts nach links zunimmt, um die der Gl. (2a) entsprechenden Abkühlzeiten bequem ablesen zu können. Auch für die symmetrische gegenseitige Lage der beiden Belastungsspiele oder, was einfacher vorzustellen ist, für den entgegengesetzten Zeitverlauf, der also von links nach rechts zunimmt, läßt sich eine Kombinationstemperatur berechnen und eine Temperaturkurve zeichnen, die mitunter höhere Werte ergeben kann als die Hauptkurve. Diese Kurve ist als Gegenkurve in Abb. 4 strichliert eingezeichnet. Sie verläuft, wie ersichtlich, teils oberhalb, teils unterhalb der Hauptkurve. Während aber die einzelnen Punkte der Hauptkurve mit $\bar{\vartheta}_{\max 2}$ und $\bar{\vartheta}_{\max 1}$ zu addieren sind, um die Höchsttemperatur zu erhalten, fällt das Maximum der Kombinationstemperatur für die Gegenkurve nur mit $\bar{\vartheta}_{\max 2}$, nicht aber mit $\bar{\vartheta}_{\max 1}$ zusammen. Das Temperaturmaximum des Verbrauchers 1 ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht erreicht, und es darf daher nicht mit der Höchsttemperatur $\bar{\vartheta}_{\max 1}$, sondern nur mit einer Temperatur nach Gl. (2) gerechnet werden, wobei $t_1 = \varepsilon (T_1 - T_2)$ zu setzen ist. In der Abb. 4 bedeutet die horizontale Gerade *a* die höchste Temperatur $\bar{\vartheta}_{\max 1}$ des langsameren Verbrauchers, die fast gerade Linie *b* die größte Temperatur $\bar{\vartheta}_{\max 2}$ des schnelleren Verbrauchers, die Kurve *c* die Temperatur des schnelleren Verbrauchers für die symmetrische gegenseitige Lage der beiden Belastungsspiele entsprechend der Gegenkurve. Die Differenz *a*—*c* stellt daher jenen Betrag dar, um den die Gegenkurve vermindert werden muß, wenn sie genau so wie die Hauptkurve zur Bestimmung der Gesamttemperatur mit $\bar{\vartheta}_{\max 2}$ und dem unverminderten Wert von $\bar{\vartheta}_{\max 1}$ zusammengesetzt werden soll. Wird dieser Betrag von der Gegenkurve abgezogen, so erhält man die teils voll, teils kurz strichliert ausgezogene reduzierte Gegenkurve für zwei Verbraucher. Vergleicht man die Hauptkurve mit der reduzierten Gegenkurve, so bemerkt man, daß an den durch Schraffen hervorgehobenen Stellen die reduzierte Gegenkurve höher liegt als die Hauptkurve. Für die entsprechenden relativen Spiel-

dauern ist also zur Ermittlung der Gesamttemperatur von zwei Verbrauchern nicht mit der Hauptkurve, sondern mit der reduzierten Gegenkurve zu rechnen. Bei drei Verbrauchern müßte der Wert entsprechend $a-c$ von der Gegenkurve zweimal, bei mehr als drei Verbrauchern der entsprechende Wert noch öfter in Abzug gebracht werden, wodurch die Gegenkurve durchwegs unterhalb der Hauptkurve verläuft. Daraus geht hervor, daß für mehr als zwei Verbraucher zumeist mit der Hauptkurve allein gerechnet werden kann.

In der Kurve gilt der Punkt A für die relative Spieldauer 0, der Punkt B für die relative Spieldauer $0.25 = \varepsilon$, der Punkt C für die relative Spieldauer $(1 - \varepsilon)$, der Punkt D für die relative Spieldauer 1. Die Kurve kann über 1 hinaus beliebig weit verlängert werden, wobei T_2 größer ist als T_1 . Da die Zeitkonstante auf T_1 bezogen wird, liegt der Kurvenast rechts von der relativen Spieldauer 1 höher als links davon. Bezeichnet man grundsätzlich die größere der beiden Spieldauern mit T_1 , so wird der Kurvenast rechts von der relativen Spieldauer 1 entbehrlich. Er wurde daher nur bis zu einer relativen Spieldauer von 110% gezeichnet, um die Resonanzspitze für den Synchronismus beurteilen zu können. Der Punkt B entspricht jenem Wert von T_2 , der mit der Belastungszeit εT_1 gleich groß ist. Links von B können also im ungünstigsten Falle mehr als zwei Belastungsspitzen εT_2 in die Belastungszeit εT_1 fallen; es summiert sich also J_1 mit J_2 während dieser Belastungszeit mehr als einmal, bei der relativen Spieldauer 20% genau zweimal, nämlich einmal zu Beginn, das zweitemal zu Ende der Einschaltzeit εT_1 . Aus diesem Grunde ergibt sich hier eine besonders hohe Temperaturspitze. Bei der relativen Spieldauer $11\frac{1}{9}\%$ summiert sich J_2 mit J_1 während der Einschaltzeit εT_1 in analoger Weise dreimal usw.

Tabelle 2. Bezogene größtmögliche Kombinationstemperaturen (Resonanzlinien)

für $\frac{\tau}{T} = \infty$ und $\varepsilon = 0.25$, $\bar{\vartheta}_k = \varepsilon \frac{k}{n}$; $(k-1) < \varepsilon n < k$.

Laufzahlen $n \quad k$		Wert $2 \bar{\vartheta}_k$	$\frac{T_2}{T_1}$ %	Laufzahlen $n \quad k$		Wert $2 \bar{\vartheta}_k$	$\frac{T_2}{T_1}$ %
1	1	$0.5 \cdot \frac{1}{1} = 0.5$	100	17	5	$0.5 \cdot \frac{5}{17} = 0.147059\dots$	5^{16}_{17}
2	1	$0.5 \cdot \frac{1}{2} = 0.25$	50	18	5	$0.5 \cdot \frac{5}{18} = 0.13\bar{8}$	5^6_{18}
3	1	$0.5 \cdot \frac{1}{3} = 0.1\bar{6}$	$33\frac{1}{3}$	19	5	$0.5 \cdot \frac{5}{19} = 0.131579\dots$	5^5_{19}
4	1	$0.5 \cdot \frac{1}{4} = 0.125$	25	20	5	$0.5 \cdot \frac{5}{20} = 0.125$	5
5	2	$0.5 \cdot \frac{2}{5} = 0.2$	20	21	6	$0.5 \cdot \frac{6}{21} = 0.14285\bar{7}$	4^{16}_{21}
6	2	$0.5 \cdot \frac{2}{6} = 0.1\bar{6}$	$16\frac{2}{3}$	22	6	$0.5 \cdot \frac{6}{22} = 0.13\bar{6}$	4^6_{11}
7	2	$0.5 \cdot \frac{2}{7} = 0.14285\bar{7}$	$14\frac{2}{7}$	23	6	$0.5 \cdot \frac{6}{23} = 0.13025\dots$	4^8_{23}
8	2	$0.5 \cdot \frac{2}{8} = 0.125$	$12\frac{1}{2}$	24	6	$0.5 \cdot \frac{6}{24} = 0.125$	4^1_6
9	3	$0.5 \cdot \frac{3}{9} = 0.1\bar{6}$	$11\frac{1}{9}$	25	7	$0.5 \cdot \frac{7}{25} = 0.14$	4
10	3	$0.5 \cdot \frac{3}{10} = 0.15$	10	26	7	$0.5 \cdot \frac{7}{26} = 0.134616\dots$	3^{11}_{13}
11	3	$0.5 \cdot \frac{3}{11} = 0.1\bar{3}\bar{6}$	$9\frac{1}{11}$	27	7	$0.5 \cdot \frac{7}{27} = 0.129\bar{6}$	3^{19}_{27}
12	3	$0.5 \cdot \frac{3}{12} = 0.125$	$8\frac{1}{3}$	28	7	$0.5 \cdot \frac{7}{28} = 0.125$	3^4_7
13	4	$0.5 \cdot \frac{4}{13} = 0.1538462\dots$	$7\frac{9}{13}$	29	8	$0.5 \cdot \frac{8}{29} = 0.137931\dots$	3^{13}_{29}
14	4	$0.5 \cdot \frac{4}{14} = 0.14285\bar{7}$	$7\frac{1}{14}$	30	8	$0.5 \cdot \frac{8}{30} = 0.1\bar{3}$	3^1_3
15	4	$0.5 \cdot \frac{4}{15} = 0.1\bar{3}$	$6\frac{2}{3}$				
16	4	$0.5 \cdot \frac{4}{16} = 0.125$	$6\frac{1}{4}$				

Innerhalb der gezeichneten Kurven ist zwischen Punkten, die durch Kreise, und solchen, die durch Striche gekennzeichnet sind, unterschieden. Die ersteren bedeuten

Höchsttemperaturen, denen für die Zeitkonstante unendlich keine Resonanzlinie entspricht; die größtmögliche mittlere Kombinationstemperatur dieser Betriebszustände beträgt also 0.125. Allen Punkten jedoch, die durch Striche angedeutet sind, entspricht eine größtmögliche mittlere Kombinationstemperatur größer als 0.125 und somit eine Resonanzlinie. Die größeren dieser Resonanzlinien sind eingezeichnet und mit Nummern versehen. Nur bei der Resonanzlinie 42 ist außer der Nummer auch der Wert der mittleren Kombinationstemperatur angegeben. Die Zahlenwerte der Resonanzlinien Nr. 1 bis 30 sind in Tabelle 2 zusammengefaßt.

Man sieht, daß zwischen den Resonanzlinien und der Hauptkurve ein Zusammenhang besteht: Einer jeden größeren Resonanzlinie entspricht ein ausgeprägter Knick der Hauptkurve in dem Sinn, daß die Richtungstangente bei zunehmender Spieldauer T_2 plötzlich auf einen beträchtlich kleineren Wert herabspringt. Am deutlichsten läßt sich dieser Zusammenhang bei jenen Punkten beobachten, die mit 100 bezeichnet sind. Die Ziffer 100 bedeutet, daß die Summenbelastungsperiode 100% von T_1 beträgt. Für diese Punkte ist T_1 also gleichzeitig Summenbelastungsperiode, T_2 ein ganzzahliger Bruchteil von T_1 , und zwar:

Bei der Resonanzlinie 2 ist $T_2 = \frac{T_1}{2}$;

bei der Resonanzlinie 3 ist $T_2 = \frac{T_1}{3}$.

Bei $\frac{T_1}{4}$ fehlt die Resonanzlinie für die Einschaltdauer $\varepsilon = 1/4$, weil die größtmögliche mittlere Kombinationstemperatur 0.125 beträgt; infolgedessen nimmt im Punkt B die Richtungstangente bei zunehmender Spieldauer nicht sprunghaft ab, sondern zu.

Tabelle 3. Tangenten für $\varepsilon = 0.25\%$; $\frac{\tau}{T} = 2.4$.

$\frac{T_2}{T_1}$ %	Hauptwert	tg α_0 je %	tg α_u je %
100	0.580614	— 0.0418 026	+ 0.0489 690
$85\frac{5}{7}$	0.239389	+ 0.0057 283	+ 0.0130 017
$83\frac{1}{3}$	0.229597	+ 0.0049 091	+ 0.0152 362
$77\frac{7}{9}$	0.212522	— 0.0052 469	+ 0.0014 918
75	0.210656	+ 0.0012 906	+ 0.0002 733
$66\frac{2}{3}$	0.237311	+ 0.0011 574	+ 0.0363 017
60	0.204885	— 0.0264 907	— 0.0017 187
$55\frac{5}{9}$	0.224677	— 0.0364 908	+ 0.0077 820
50	0.297866	+ 0.0010 137	+ 0.0966 382
$33\frac{1}{3}$	0.200296	+ 0.0010 614	+ 0.1440 575
25	0.150872	+ 0.0010 920	— 0.0022 228
20	0.232347	— 0.2335 240	+ 0.2618 362

Die prozentuellen Summenperioden, die in den Kurven eingetragen sind, stellen einen beiläufigen Maßstab für die Unstetigkeit der ersten Ableitung der Kurve insofern dar, als eine längere Summenbelastungsperiode die Richtungsänderungen der Tangenten verkleinert. Die größten Tangentenknice liegen daher bei Summenperioden von 100, während bei Summenperioden von über 1000 die Richtungsänderungen der Tangenten schon für das genaue Zeichnen vernachlässigbar gering sind. Deshalb konnte es für das Zeichnen der vorliegenden Kurve genügen, die Tangenten für die Summenperioden 100 zu bestimmen und nur für einige ausgewählte Punkte mit höherer Summenperiode die Tangenten anzugeben. Die Werte der gerechneten und in die

Abb. 4 eingetragenen Tangenten sind in der Tabelle 3 zusammengestellt. Die Vergrößerungen d und e zeigen beispielsweise, daß das Gesetz der Richtungsänderung auch für die relativen Spieldauern 60, $83\frac{1}{3}$ und $85\frac{5}{7}\%$ aufrecht bleibt.

Die Resonanzlinien lassen sich in außerordentlich einfacher Weise rechnen nach der Gleichung

$$\bar{\vartheta}_{k\text{res}} = \varepsilon_2 \frac{k}{n}, \quad (9)$$

wobei $\frac{k-1}{\varepsilon_2} < n \leq \frac{k}{\varepsilon_2}$, ferner k und n ganzzahlig und positiv sein muß; dementsprechend lassen sie sich auch durch die dünn angedeuteten strichpunktlierten und strichlierten Linien in einfacher Weise konstruieren. Es besteht die Gesetzmäßigkeit, daß die Endpunkte der Resonanzlinien 1, 2, 3 und 4 auf einem Strahl durch den Ursprung, ebenso die Resonanzlinien 5, 6, 7, 8, ferner 9, 10, 11, 12 usw. auf je einem Strahl durch den in Abb. 4 nicht gezeichneten Ursprung liegen. Die Verbindungslinie von 4 und 5 schneidet die Verbindungslinie von 8 und 9, sowie von 12 und 13 usw. in der Abszissenachse im Punkt 0·5; dieser Wert entspricht der Länge der Resonanzlinie 1. Wie man sieht, ergeben die ausgeprägtesten Resonanzlinien eine Aufeinanderfolge von Dreiecken, deren Spitzen auf einer Geraden liegen, die die Endpunkte von 1, 5, 9, 13 usw. verbindet und die Ordinatenachse im Punkt $0\cdot125 = 2\varepsilon^2$ schneidet. Es ist klar, daß auch die dazwischenliegenden, kleineren Resonanzlinien nach demselben Gesetz wiederkehren; der Resonanzlinie 3 der Serie $k = 1$ für die Spieldauer $\frac{2}{3} = 66\frac{2}{3}\%$ entspricht in der Serie $k = 2$ die Resonanzlinie 7 mit der Spieldauer $\frac{2}{7} = 28\frac{4}{7}\%$, ferner in der Serie $k = 3$ die Resonanzlinie 11 mit der Spieldauer $\frac{2}{11} = 18\frac{2}{11}\%$ usw. Das Gesamtbild der Resonanzlinien kehrt also, gesetzmäßig verändert, bei abnehmender relativer Spieldauer wieder, was auch zu einer gesetzmäßigen Wiederkehr der Hauptkurve führt, so daß deren weiterer Verlauf nach links durch die gezeichneten geraden Verbindungslinien hinreichend angedeutet sein dürfte. Noch einige weitere Zusammenhänge sind in die Abbildung eingetragen. Alle Resonanzlinien, deren Nummern durch 4 teilbar sind, betragen 0·125; sie haben gegenüber der mittleren Kombinationstemperatur, die ebenfalls 0·125 beträgt, die Amplitude 0 und können daher mit Recht als nicht vorhanden oder fehlend bezeichnet werden.

Über dieses Gerippe von Resonanzlinien ist die Hauptkurve in der Weise ausgebaut, daß alle Resonanzlinien im Verlauf der Hauptkurve wiedererkannt und daß die größeren von den Resonanzlinien auch zu Höchstwerten der Kombinationstemperatur für endliche Zeitkonstanten $\frac{\tau}{T}$ führen. Es ist bemerkenswert, daß die obere Tangente für die Spieldauern $33\frac{1}{3}$, 50 und $66\frac{2}{3}\%$ schwach positiv ist, was zu einer geringfügigen Verlagerung des Höchstwertes nach rechts führt. Ferner ist bemerkenswert, daß die niedrigsten Höchsttemperaturen ziemlich nahe neben diesen Extremen, jedoch links davon liegen, und zwar für die gezeichnete Hauptkurve etwa bei $32\frac{1}{2}\%$ links neben $33\frac{1}{3}\%$, bei $44\frac{1}{2}\%$ und $46\frac{1}{2}\%$ links neben 50% und bei $62\frac{1}{2}\%$ und $64\frac{1}{2}\%$ links neben $66\frac{2}{3}\%$ usw. Andere günstige relative Spieldauern sind die Punkte B und C , also 25 und 75%. Für unruhige Verbraucher der Einschaltdauer $\frac{1}{4}$ gibt die vorliegende Hauptkurve einen Maßstab für die Vor- und Nachteile der verschiedenen Werte von hinzukommenden neuen Spieldauern. Es kann von großem praktischem Vorteil sein zu wissen, daß die größtmöglichen Temperaturspitzen wesentlich herabgesetzt werden können, wenn die Spieldauer eines Verbrauchers von 50 auf $46\frac{1}{2}$ oder von $33\frac{1}{3}$ auf $32\frac{1}{2}\%$ herabgesetzt wird.

Ein entsprechender Zusammenhang besteht natürlich auch für jede andere Einschaltdauer. Es sind daher in Abb. 5 die Resonanzlinien allein gezeichnet für die Einschaltdauern 20, 25, 30, $33\frac{1}{3}$, 40 und 50% bei derselben Höchststromstärke oder Belastungsamplitude. Diese Abbildung zeigt, inwieweit der Temperaturverlauf durch

Veränderung der Einschaltdauer eines der beiden Verbraucher beeinflusst werden kann. Ist es beispielsweise bei 25% ED nicht möglich, die relative Spieldauer von 50% herabzusetzen, so kann ein wesentlich gleichmäßigerer Temperaturverlauf erreicht werden, wenn es gelingt, die Einschaltdauer bei gleicher mittlerer Leistung etwas zu erhöhen. In anderen Fällen kann eine Verminderung der Einschaltdauer von Vorteil

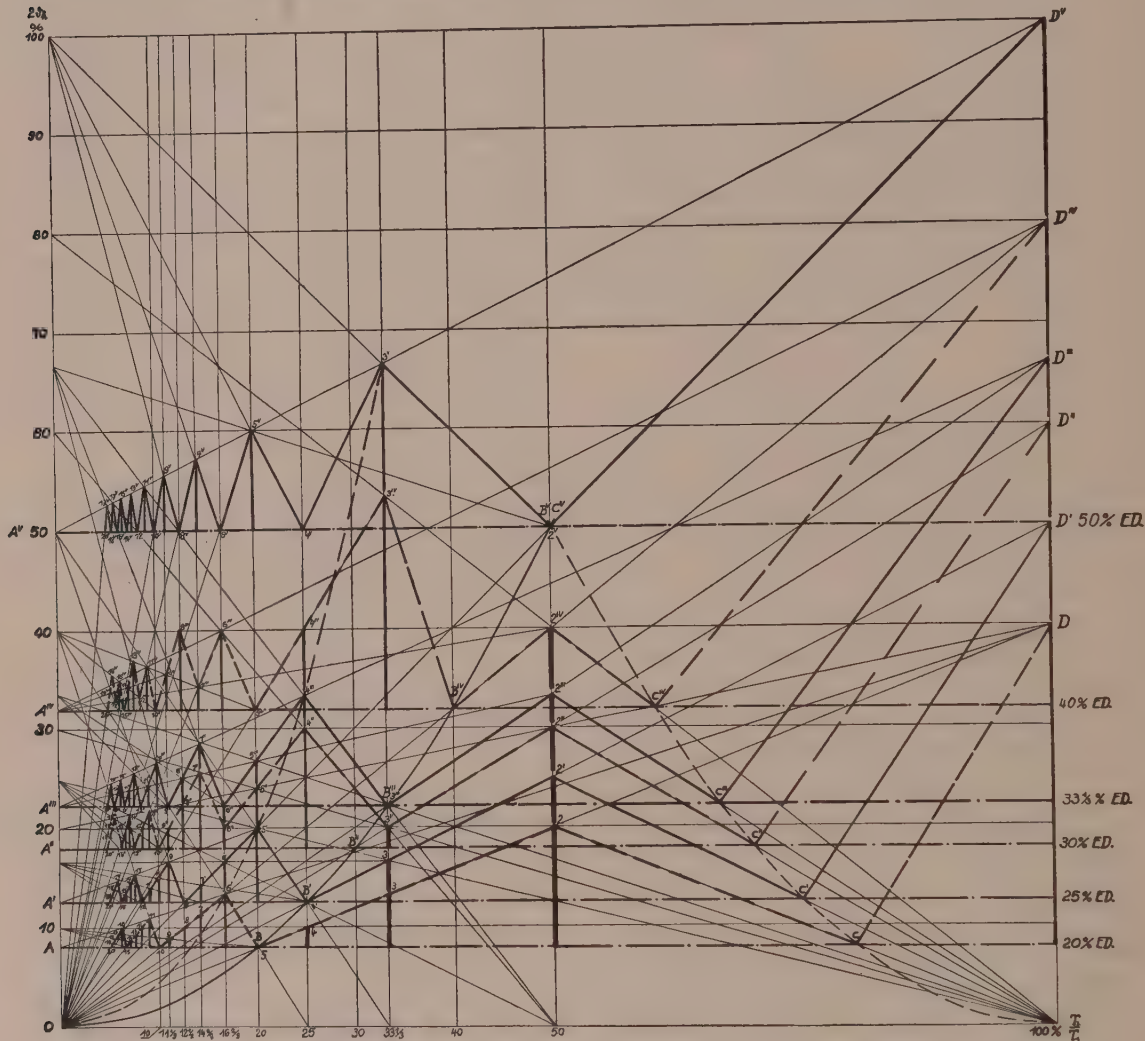


Abb. 5. Kombinationstemperaturspitzen bei gleicher Belastungsstromstärke und $\frac{\tau}{T} = \infty$ für 20, 25, 30, 33 1/3, 40, 50% ED. Die Endpunkte der Resonanzlinien sind durch Gerade verbunden.

sein. Beim Vergleich von Temperaturen für verschiedene relative Einschaltzeiten ist zu beachten, daß eine Vergrößerung der Einschaltdauer bei derselben Stromstärke eine proportionale Vergrößerung der Arbeitsleistung in der Zeiteinheit zur Folge hat. Soll diese Arbeitsleistung ungeändert bleiben, so muß die Stromstärke verkehrt proportional dem Verhältnis der Einschaltdauern herabgesetzt werden. Die Kombinationstemperaturen für die Einschaltdauer ε_2 sind daher mit $\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2$ zu multiplizieren, wenn sie mit denen für die Einschaltdauer ε_1 verglichen werden sollen. Durch die

beiden Abb. 4 und 5 ist man in der Lage, die Auswirkungen einer Veränderung von Spieldauer oder Einschaltdauer auf die größtmögliche Höchsttemperatur zu überblicken, wenn beide Verbraucher dieselbe oder annähernd dieselbe Stromstärke haben.

Leistungsunterschiede zwischen den beiden Verbrauchern ändern den Verlauf der Kombinationstemperatur nur quantitativ, nicht aber qualitativ. Entsprechend der bekannten Tatsache, daß unter allen Rechtecken gleichen Umfanges das Quadrat die größte Fläche bedeckt, ergeben sich die höchsten Kombinationstemperaturen für zwei gleich große Belastungsströme. Sind die Belastungsströme bei gleicher Summenleistung ungleich, so ergeben sich sowohl die mittleren als auch die größtmöglichen Kombinationstemperaturen kleiner als nach der gezeichneten Kurve; die Lage der Resonanzlinie und damit die kennzeichnenden Eigenschaften der Kurve bleiben aber ungeändert.

Mit Hilfe der angegebenen Gleichungen kann auch der Fall von zwei oder mehr Verbrauchern ungleicher Einschaltdauer behandelt werden; hier ergibt sich beispielsweise eine besonders hohe Kombinationstemperatur für $\varepsilon_1 T_1 = \varepsilon_2 T_2$, auch die Resonanzlinien sehen anders aus. Doch ist die Mannigfaltigkeit hier so groß, daß die allgemeine Behandlung zu weit führen würde.

In der Abb. 4 sind beispielsweise für die Spielzeiten 100, 90, 80, 70, 60 s die Kombinationstemperaturen eingetragen. Auf der gezeichneten Hauptkurve ϑ_{k1} ($2 \cdot 4$) liegen die Punkte A_0, A_1, A_2, A_3 mit den relativen Spielzeiten 90, 80, 70 und 60%. Auf der nächsten gezeichneten Hauptkurve ϑ_{k1} ($2 \frac{2}{3}$), die für $\frac{\tau}{T_1} = 2 \cdot 4 \cdot \frac{100}{90} = 2 \frac{2}{3}$ gilt, liegen die Punkte A_{01}, A_{02}, A_{03} mit den relativen Spielzeiten $\frac{800}{9}, \frac{700}{9}$ und $\frac{600}{9}$ %, auf der Hauptkurve ϑ_{k1} (3) die beiden Punkte A_{12} und A_{13} , während der Punkt A_{23} der Hauptkurve ϑ_{k1} ($3 \frac{3}{7}$) entsprechen würde. Man erkennt sofort, daß sowohl die Kombinationstemperatur A_3 als auch die größte mögliche Temperaturspitze merklich herabgesetzt werden können, wenn die Spieldauer des Punktes A_3 auf etwa 62 s erhöht wird, weil die Abszisse von A_3 in diesem Falle beträchtlich abnimmt, während die Summe der Abszissen von A_{03} und A_{13} praktisch gleichbleibt. Man kann den Nachteil des Zusammenrückens von zwei benachbarten Spielzeiten leicht überblicken und den wichtigen Sonderfall beurteilen, daß die Spielzeiten einer geometrischen Reihe entsprechen, also etwa 100, 90, 81, 72·9, 65·61 s betragen. Dann haben die Punkte $A_0, A_{01}, A_{12}', A_{23}'$ und A_{34}' die Abszisse 0·9, die Punkte $A_1, A_{02}', A_{13}', A_{24}'$ die Abszisse 0·81 usw. Die Berechnung wird vereinfacht, aber die Resonanzeigenschaften treten deutlicher hervor. Beträgt beispielsweise $T_n : T_{n-1} = \frac{3}{4}$, so beträgt $\frac{T_n}{T_{n-2}} = \frac{9}{16}$, $\frac{T_n}{T_{n-3}} = \frac{27}{64}$ usw.; alle Nenner sind durch 4 teilbar, es kommt keine einzige Resonanzlinie vor. Beträgt hingegen $\frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{1}{3}$, so sind auch von $\frac{T_n}{T_{n-2}} = \frac{1}{9}$, $\frac{T_n}{T_{n-3}} = \frac{1}{27}$ weder die Nenner noch die Zähler durch 4 teilbar, alle Linien sind Resonanzlinien.

Ordnet man die Verbraucher nach der Länge der Spieldauer, so nehmen die hinzukommenden $\vartheta_{\max}$ und Kombinationstemperaturen $\vartheta_{k\mu\nu}$ des Zählers von (7a), von resonanzbedingten vorübergehenden Anstiegen abgesehen, nach (3) und (5a) beständig ab, weil die bezogene Zeitkonstante $\frac{\tau}{T_1}$ zunimmt; die im Nenner hinzukommenden entsprechenden Beträge aber, die unabhängig von der Zeitkonstanten sind, bleiben gleich groß, so daß die größte mögliche Summentemperatur ϑ_n von irgendeinem Verbraucher beginnend, abnehmen muß. Sind die Amplituden und Einschaltdauern ebenfalls verschieden, so können auch sie so geordnet werden, daß Verbraucher mit den größeren Amplituden und den kleineren Einschaltdauern zuerst rechnerisch überprüft werden, so daß die Kombinationstemperaturen im erhöhten Maße ständig

kleiner werden. Wenn die größtmögliche bezogene Temperaturspitze auch im allgemeinen vom ersten zum zweiten Verbraucher zunimmt, so muß sie doch bei hinreichender Verbraucherzahl, von irgendeinem Verbraucher beginnend, beständig abnehmen. Das kann, wenn der zweite Verbraucher wesentlich ruhiger als der erste, schon bei diesem der Fall sein. Die weitere Rechnung kann dann abgebrochen werden, wenn die nach (7) errechnete größte mögliche Temperaturspitze unterhalb der höchstzulässigen Temperaturspitze liegt.

b) Für quasiperiodischen rechteckigen Belastungsverlauf.

Verändert sich die Spieldauer, die Einschaltdauer oder die Amplitude der Belastung von Periode zu Periode in einem begrenzten Toleranzbereich, so kann eine derartige Belastung wie eine periodische behandelt werden, wenn man sich der im folgenden beschriebenen Zusammenhänge bewußt ist.

Liegt die Spieldauer T_1 fest, während nur T_2 schwankt, so liegt es nahe, den arithmetischen Mittelwert der Kombinationstemperaturen des Toleranzbereiches von T_{2u} bis T_{2o} als größte „wahrscheinliche“ Kombinationstemperatur anzusehen, also

$$\vartheta_{k1w} = \frac{T_1}{T_{2o} - T_{2u}} \int_{T_{2u}/T_1}^{T_{2o}/T_1} \vartheta_{k1} d\left(\frac{T_2}{T_1}\right), \quad (10)$$

wobei T_{2u}/T_1 den untersten und T_{2o}/T_1 den obersten vorkommenden Wert von T_2/T_1 bedeutet.

Schwankt die Spieldauer nach Abb. 4 entlang ϑ_{k1} (2'4) von A_1 bis A_2 , so stellt ϑ_{k1w} die Ordinate eines Rechteckes zwischen $T_{2u}/T_1 = 70\%$ und $T_{2o}/T_1 = 80\%$ dar, das denselben Flächeninhalt hat wie die Fläche, die die Kurve ϑ_{k1} (2'4) mit der Abszisse in demselben Bereich von T_2/T_1 einschließt. Die größte mögliche Kombinationstemperatur liegt höher als diese größte „wahrscheinliche“ Kombinationstemperatur, doch läßt sie sich ohne Kenntnis des zeitlichen Verlaufes von T_2 nicht berechnen. Im ungünstigsten Falle, wenn eine lange dauernde Häufung der höchsten Kombinationstemperaturen des Bereiches möglich ist, kann sie bis an den Mittelwert dieser gehäuften höchsten Kombinationstemperaturen heranreichen. Dauert die Häufung länger als etwa τ , so wird es sich bei überschlägigen Bestimmungen empfehlen, die obige Planimetrierung nur über diese gehäuften höchsten Kombinationstemperaturen des Bereiches zu erstrecken. Andererseits wird ϑ_{k1w} am genauesten dann erreicht, wenn die Mischung der vorkommenden Kombinationstemperaturen eine vollkommene ist, wenn also beispielsweise der Belastungsfolge, die bei längerer Dauer zu der größten Kombinationstemperatur des Bereiches führen würde, jene folgt, die zu der kleinsten Kombinationstemperatur des Bereiches führen würde, ferner jener, die zu der zweitgrößten Kombinationstemperatur führen würde, die Belastungsfolge folgt, die zu der zweitkleinsten Kombinationstemperatur des Bereiches führt usw., so daß die Summe zweier aufeinanderfolgender Belastungsfolgen, für sich betrachtet, bereits den Grenzwert ϑ_{k1w} ergibt.

Ein derartiger Schwankungsverlauf wird praktisch nicht gerade häufig auftreten. Er ist näherungsweise denkbar, wenn die Spieldauer durch einen Regler konstant gehalten wird, der bei Überschreitung des Sollwertes rasch eine nahezu proportionale Unterschreitung herbeiführt. Bei der heute noch überwiegenden menschlichen Bedienung wird es im allgemeinen zu Häufungen der Über- oder Unterschreitungen kommen; auch allmählich zu- und abnehmende Über- und Unterschreitungen werden nicht selten vorkommen. Alle diese Abweichungen von der „vollkommenen Mischung der Belastungsfolgen“ führen zu größtmöglichen Kombinationstemperaturen, von denen ohne Kenntnis des zeitlichen Verlaufes nur ausgesagt werden kann, daß sie

$\vartheta_{k w_1}$ überschreiten, die größte im Bereich vorkommende Kombinationstemperatur der Kurve jedoch niemals erreichen können. Unter sonst gleichen Bedingungen werden diese größtmöglichen Kombinationstemperaturen dem Werte $\vartheta_{k_1 w}$ um so näher liegen, je größer $\frac{\tau}{T_1}$ ist; denn für $\frac{\tau}{T_1} \rightarrow \infty$ fallen sie mit $\vartheta_{k_1 w}$ zusammen, das in diesem Falle mit ϑ_m gleichgroß ist. $\vartheta_{k_1 w}$ entspricht also jener Extremale, für die die größtmögliche Kombinationstemperatur den kleinsten Wert hat. Diese Extremale hat einen rechteckförmigen Verlauf der oben beschriebenen Art. Abgesehen davon, daß dieses Extrem für $\frac{\tau}{T_1} \geq 1$ außerordentlich flach verläuft, kommt den Überschreitungen dieses Kleinstwertes ihrer geringeren Häufigkeit gemäß eine geringere praktische Bedeutung zu. Nur für die größte wahrscheinliche Kombinationstemperatur $\vartheta_{k_1 w}$ gilt dieselbe Häufigkeit wie für ϑ_k einer exakten relativen Spieldauer. $\vartheta_{k_1 w}$ stellt daher einen hinsichtlich Häufigkeit einwandfreien, eindeutigen und daher praktisch brauchbaren Vergleichswert dar. Die selten zu erwartende größtmögliche Überschreitung dieses Wertes kann, wenn überhaupt erforderlich, durch einen Zuschlag berücksichtigt werden, der einen den Betriebsverhältnissen und $\frac{\tau}{T_1}$ -entsprechenden Bruchteil von $\vartheta_{k \max} - \vartheta_{k_1 w}$ beträgt.

Analoges gilt, wenn die größere der beiden Spielzeiten schwankt. In diesem Falle empfiehlt es sich, statt mit den Hauptkurven $\vartheta\left(\frac{\tau}{T_1}\right)$, die für unveränderliche längere Spieldauer gelten, mit Hauptkurven $\vartheta\left(\frac{\tau}{T_2}\right)$ zu arbeiten, die für unveränderliche kürzere Spieldauer gelten. Schwanken beide Spielzeiten, so empfiehlt es sich, mit beiden Kurvenarten zu arbeiten. Die „wahrscheinliche“ Kombinationstemperatur ist dann durch den Schwerpunkt der Viereckfläche bestimmt, die durch je zwei Kurven der beiden Scharen eingeschlossen wird. Es kann jedoch nur dann erwartet werden, daß die „vollkommene“ Mischung in diesem Falle erfüllt ist, wenn τ sehr lang ist im Vergleich zu T_1 und T_2 . Man wird daher meist besser mit dem Schwerpunkt der beiden oberen Viereckseiten rechnen.

Schwankungen der Belastungsamplitude können als überlagerte Belastungskurve berücksichtigt werden. Sie verursachen eine Vergrößerung des effektiven Summenstromes, so daß die auf diesen bezogene größte mögliche Temperaturspitze zumeist verkleinert wird.

Finden Schwankungen der Belastungsströme gleichzeitig mit Spiel- oder Einschalt-dauerschwankungen statt, so wird man meist von der quasiperiodischen Betrachtungsweise absehen und die Schwankungen durch Untersuchung eines längeren Zeitintervalles berücksichtigen, das mehrere Belastungsfolgen umfaßt.

4. Zulässigkeitsgrenzen.

Für die Beurteilung der Zulässigkeit einer Belastung durch zwei unruhige Verbraucher ist jedoch nicht die Kombinationstemperatur allein, sondern die bezogene Höchsttemperatur nach (6) maßgebend. Diese kann, da nach (6a) für alle Temperaturen derselbe Maßstab gilt, mit Hilfe des strichliert gezeichneten Maßstabes in Abb. 4 unmittelbar abgelesen werden. Man denke sich die Ordinaten der Linie a und b , die $\vartheta_{\max 1}$ und $\vartheta_{\max 2}$ entsprechen, nach abwärts aufgetragen und erhält die geneigte, unmerklich gekrümmte Abszissenachse der bezogenen Höchsttemperatur für den Summenstrom. Sie verläuft symmetrisch zu b . Die 100%-Linie muß der mittleren Summentemperatur entsprechen, die $2\varepsilon(1+\varepsilon)$ beträgt. Sie schneidet, da für die Ordinatenachse $b = \vartheta_{\max 2} = \varepsilon$ ist, diese im Punkt $2\varepsilon^2 - (a - b)$; die 10%-Linie liegt von dieser Linie $2\varepsilon(1+\varepsilon) \cdot 0.1$ entfernt usw.

Näherungskurven I bis VII zum Vergleich mit Haupt- und Gegenkurve für $\frac{\tau}{T_1} = 2.4$ und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.25$.

$$\text{I. } 2\vartheta_k = \frac{T_{1-2}}{\tau \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} (1 - \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}) + 2\sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

$$\text{II. } 2\vartheta_k = \frac{T_{1-2}}{\tau} \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

$$\text{III. } 2\vartheta_k = \frac{2T_{1+2}}{\tau} \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1) + \frac{2\varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1)}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi\tau}{T_{1-2}}\right)^2}} \cos \left(\frac{T_1}{T_{1-2}} \operatorname{arctg} \frac{2\pi\tau}{T_1} - \operatorname{arctg} \frac{2\pi\tau}{T_{1-2}} \right) + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2; \quad \varepsilon_1 > \varepsilon_2.$$

$$\text{IIIa. } 2\vartheta_k = \frac{2T_{1+2}}{\tau} \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1) + 2\varepsilon_1 \varepsilon_2.$$

$$\text{IV. } 2\vartheta_{k \text{ res}} = \frac{T_1}{\tau} \cdot \frac{\varepsilon_2^2 (1 - \varepsilon_2)}{1 - \frac{1 - \varepsilon_2}{k}} + \frac{2\varepsilon_2^2}{1 - \frac{1 - \varepsilon_2}{k}}; \quad 1 < k = \varepsilon_2 n + (1 - \varepsilon_2) < \infty \text{ ganzzahlig.}$$

$$\text{V. } 2\vartheta_{k \text{ res}} = \frac{T_1 k}{\tau n} \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_2) + \frac{k}{n} 2\varepsilon_2; \quad k = 1, 2, 3, \dots \frac{k-1}{\varepsilon_2} + 1 < n \leq \frac{k}{\varepsilon_2} \text{ ganzzahlig.}$$

$$\text{VI. } 2\vartheta_k = \left[\frac{T_1}{\tau} \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_2) + 6\varepsilon_2^2 \right] \frac{T_2}{T_1} + 2\varepsilon_2^2.$$

$$\text{VII. } 2\vartheta_{m \text{ res}} = 2 \frac{k}{n} \varepsilon_2; \quad n = \frac{k-1}{\varepsilon_2} + 1.$$

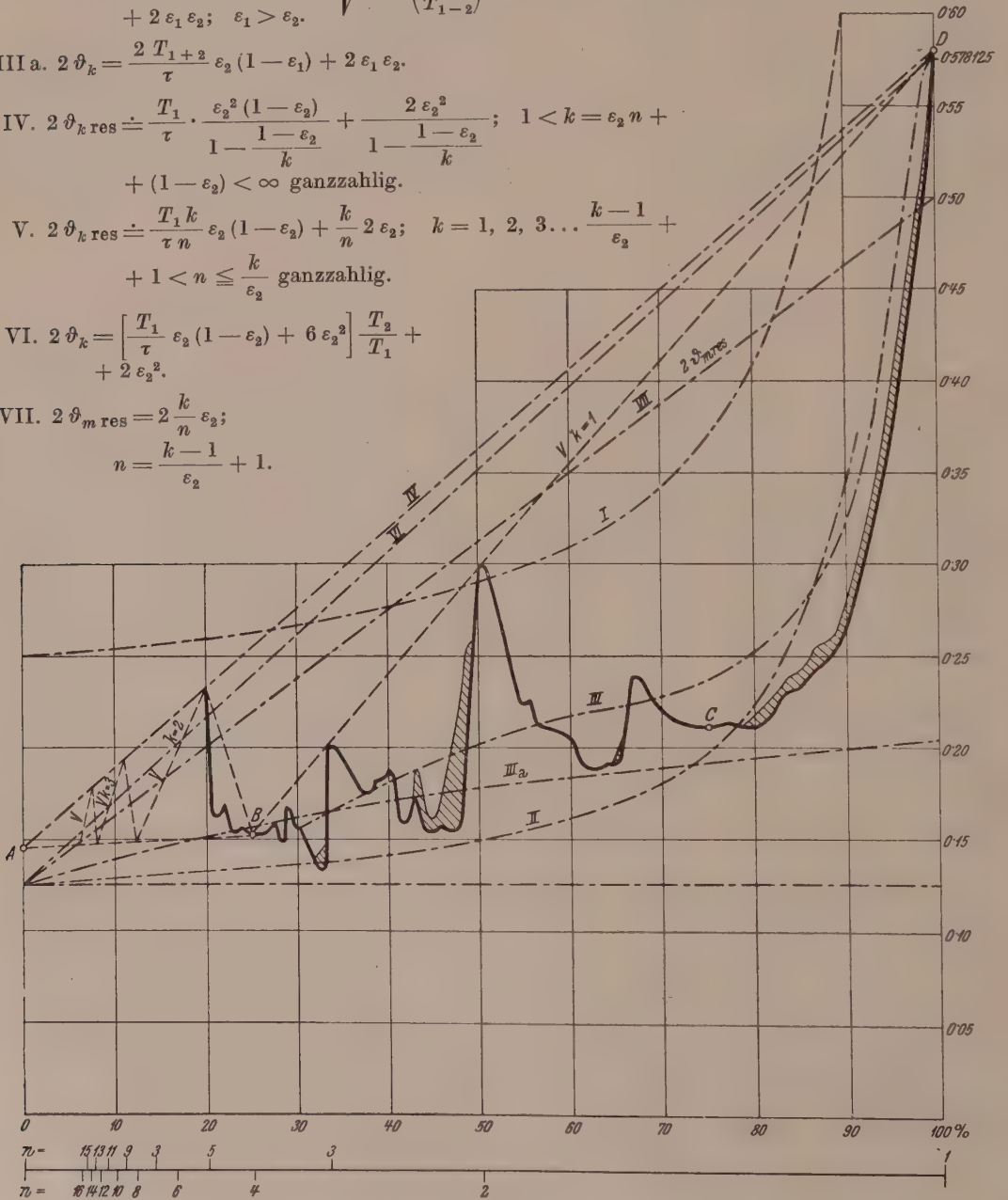


Abb. 6.

Man sieht, daß sogar die 15%-Grenze der REB für $\frac{\tau}{T_1} = 2.4$ überwiegend überschritten wird. Die gezeichnete Kurve gilt auch noch für eine wenig abweichende bezogene Zeitkonstante, wenn der Maßstab entsprechend geändert wird; denn bei kleinen Änderungen von $\frac{\tau}{T_1}$ ändert sich sowohl $\vartheta_{k1} - \vartheta_{m12}$ als auch $\vartheta_{\max 1} - \vartheta_{m1}$ und $\vartheta_{\max 2} - \vartheta_{m2}$ in guter Annäherung verkehrt proportional dem Verhältnis der bezogenen Zeitkonstanten. Einer Temperaturspitze von 15% bei $\frac{\tau}{T_1} = 3$ entspricht daher die $15 \cdot \frac{3}{2.4} = 18\frac{3}{4}\%$ -Linie bei $\frac{\tau}{T_1} = 2.4$. Nur das Bereich von 0 bis $46\frac{1}{2}\%$ liegt unterhalb der $18\frac{3}{4}\%$ -Linie, nur für diese relativen Spielzeiten bleibt ein Leiter mit der bezogenen Zeitkonstanten 3 innerhalb der 15%-Grenze. Dabei müssen die Resonanzzustände der fünften und dritten Resonanzlinie und die der 40 und $42\frac{6}{7}\%$ -Resonanzlinie innerhalb dieses Bereiches ausgeschlossen werden. Für gemeinsame Speiseleitungen kann sich diese Zeitkonstante häufig ergeben und eine entsprechende Herabsetzung der mittleren Endtemperatur erfordern.

Die Größe der erforderlichen Herabsetzung der mittleren Endtemperatur, die den kleinstzulässigen Querschnitt bestimmt, kann aus der Abb. 4 für $\frac{\tau}{T_1} = 2.4$ unmittelbar abgelesen werden: man liest beispielsweise für $\frac{T_2}{T_1} = 62\frac{1}{2}\%$ eine Temperaturspitze von 20.65% ab. Soll nur eine Temperaturspitze von 5% zugelassen werden, so muß die mittlere Endtemperatur auf $\frac{105}{120.65} = 87\%$ herabgesetzt werden; der Leitungsquerschnitt darf höchstens mit $\sqrt{0.87} = 93.7\%$ der sonst zulässigen Stromstärke ausgenützt werden.

Die Kurvenstücke $\frac{\tau}{T_1} = 2\frac{2}{3}$ und 3 in Abb. 4 gestatten den Vergleich, wie groß die Fehler sind, wenn die Kurve $\frac{\tau}{T_1} = 2.4$ verkehrt proportional auf eines dieser Kurvenstücke umgerechnet wird. Man erkennt, daß die Abweichungen in der Nähe der ausgeprägten Resonanzlinien etwas größer sind als in den Zwischenräumen. Das liegt daran, daß die Resonanzlinien Unstetigkeiten von ϑ_{m12} darstellen; es kann daher in ihrer Nähe keine Proportionalität erwartet werden. Wollte man das Kurvenstück $\frac{\tau}{T_1} = 3$ unmittelbar zur Bestimmung der bezogenen Höchsttemperatur benutzen, so müßte nicht nur die Größe, sondern auch die Nulllinie des gezeichneten Maßstabes verändert werden.

5. Näherungsrechnungen.

Bei der Mannigfaltigkeit der möglichen Kombinationen von Einschaltdauer, Spieldauer und Belastungsamplitude kann nicht gefordert werden, daß drei und mehr Kurvenscharen angegeben werden, die die Ablesung jedes Betriebsfalles ermöglichen würden. Dies wäre verschwenderisch, weil in den seltensten Fällen die genaue Größe der größten möglichen (oder wahrscheinlichen) Temperaturspitze von Wichtigkeit ist, und weil der Belastungsverlauf zumeist der Abb. 1 nur näherungsweise entsprechen wird. Meist wird nur zu entscheiden sein, ob ein Querschnitt oder eine Transformatoren- oder Maschinentype ausreicht oder nicht, ob also die zu erwartenden Temperaturspitzen zulässig sind oder nicht. Für die Entscheidung dieser Zulässigkeitsfrage wäre die exakte Temperaturkontrolle nach (5) und (6) im allgemeinen zu zeitraubend, und es sind Angaben erwünscht, die wenigstens dann eine rasche Entscheidung ermöglichen, wenn der Fall nicht an der äußersten Grenze der Zulässigkeit gelegen ist.

In den weitaus meisten Fällen wird die Größe der bezogenen Spieldauer $\frac{T_1}{\tau}$ bzw.

deren reziproker Wert $\frac{\tau}{T_1}$ allein genügen, um die Entscheidung zu treffen. Sieht man für einen Verbraucher im Sinne der Probelaufvorschriften eine Temperaturspitze von 5% entsprechend einer bezogenen Zeitkonstanten $\frac{\tau}{T_1} = 3$ als zulässig an und liest die Temperaturspitze für zwei Verbraucher, $\varepsilon = 25\%$ und $\frac{T_2}{T_1} = 62\frac{1}{2}\%$ in Abb. 4 zu 20.65% bei $\frac{\tau}{T_1} = 2.4$ ab, so liegt für diesen Fall die Zulässigkeitsgrenze bei $\frac{\tau}{T_1} = 2.4 \frac{20.65}{5} = 9.91$, also etwas unter 10. Bezogene Zeitkonstanten, die bei $\varepsilon = 25\%$ über 10 liegen, sind also für zwei Verbraucher, wenn die Umgebung der ersten, zweiten, dritten und fünften Resonanzlinien ausgeschlossen wird, unbedenklich. Für andere ε könnte $\vartheta_{\max}$ nach Gl. (3) umgerechnet werden; für diesen Zweck und für andere Näherungsrechnungen kann sie ersetzt werden durch den Näherungswert

$$\vartheta_{\max} = \frac{\vartheta_m}{\varepsilon} \frac{1 - e^{-\frac{\varepsilon T}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{T}{\tau}}} \doteq \vartheta_m \left[1 + \frac{T}{2\tau} (1 - \varepsilon) \right]; \quad \Delta \bar{\vartheta}_{\max} = \frac{T}{2\tau} (1 - \varepsilon).^5 \quad (13)$$

Geometrisch bedeutet (13), daß in Abb. 1 die Tangente an die gezeichnete Temperaturkurve im Punkt $\vartheta = \vartheta_m$ an die Stelle $t = \frac{\varepsilon}{2} T$ gerückt und nach dieser Geraden gerechnet wird. Es wird also mit unveränderlicher Wärmeableitung $\Delta \vartheta_m$ für den Enderwärmungszustand gerechnet, was eine lineare Temperaturzunahme im eingeschalteten und eine lineare Temperaturabnahme im ausgeschalteten Zustande ergibt. Die auf ϑ_m bezogene Temperaturspitze $\Delta \vartheta_{\max}$ ist daher gleich der auf die Fläche $T J_m$ bezogenen helben Über- oder Unterschußfläche $\frac{\varepsilon T}{2\tau} T (J - J_m) = \frac{T^2}{2\tau} (1 - \varepsilon) J_m$.

In Abb. 2 sind die geraden Linien, die (13) als Funktion von ε entsprechen, zum Vergleich mit den Temperaturspitzen nach (3) für mehrere bezogene Spieldauern $\frac{T}{\tau}$ strichliert eingetragen. Man sieht, daß der Fehler für die bezogene Zeitkonstante $\frac{\tau}{T} = 3$, also für die bezogene Spieldauer $1/3$, unterhalb der Strichstärke liegt. Für kleinere Zeitkonstanten nimmt er rasch zu; es gibt aber auch da Einschaltdauerwerte, für die er Null wird. Die Lage dieser Werte ist in Abb. 2 durch die Kurve Fehler = 0 angedeutet.

Mit Hilfe von (13) kann die Zulässigkeitsgrenze auf andere Werte von ε umgerechnet werden. Man erhält beispielsweise für $\varepsilon_1 = 15\%$: $\frac{\tau}{T} = 10 \frac{1 - \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_0} = 10 \frac{0.85}{0.75} = 11\frac{1}{3}$, für $\varepsilon_2 = 40\%$: $\frac{\tau}{T_1} = 10 \frac{0.6}{0.75} = 8$.

Für zwei und mehr Verbraucher ist eine einfache Näherung für die Kombinationstemperatur erwünscht, die analog (13) gebaut ist:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\vartheta}_{k12} &= \frac{T_{1-2}}{2\tau} (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2); \quad \Delta \vartheta_2 = \frac{1}{\vartheta_m (1 + 2)} [\Delta \bar{\vartheta}_{\max 1} \vartheta_{m1} + \Delta \bar{\vartheta}_{\max 2} \vartheta_{m2} + \\ &+ \Delta \bar{\vartheta}_{k12} 2 \vartheta_{m12}] = \frac{1}{\varepsilon_1 J_1^2 + 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 J_1 J_2 + \varepsilon_2 J_2^2} \left[\frac{T_1}{2\tau} (1 - \varepsilon_1) \varepsilon_1 J_1^2 + \right. \\ &+ \frac{T_2}{2\tau} (1 - \varepsilon_2) \varepsilon_2 J_2^2 + \left. \frac{T_{1-2}}{2\tau} (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2) 2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 J_1 J_2 \right], \end{aligned} \quad (14)$$

wobei $T_{1-2} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2}^6$ zu setzen ist.

⁵ Man beachte, daß $\Delta \bar{\vartheta}_{\max}$ auf ϑ_m bezogen ist, während $\bar{\vartheta}_{\max}$ auf $\frac{\vartheta_m}{\varepsilon}$ bezogen war.

⁶ Vgl. Ing.-Arch. 1947, H. 3, S. 165, Gl. (7).

Der Nenner in (14) entspricht dem effektiven Summenstrom.⁶ ϱ und Δ sind für denselben Leiter für alle Temperaturkomponenten gleich und fallen daher heraus.

(14) ist in Abb. 6 für $\frac{\tau}{T} = 2.4$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 25\%$ und $J_1 = J_2 = J$ eingetragen und mit II bezeichnet. Die Übereinstimmung ist keineswegs befriedigend; nur etwa zwischen $\frac{T_2}{T_1} = 69$ und 85% betragen die Fehler weniger als 10% . Bei $\frac{T_2}{T_1} = 78\%$ beträgt der Fehler 0. Trotz der schlechten Übereinstimmung kann (14) auch für ein größeres Bereich verwendet werden, wenn die Spieldauern so liegen, daß sich die positiven und negativen Fehler einigermaßen aufheben. Liefert (14) durchwegs zu niedrige Werte, so kann mit der Näherung gerechnet werden

$$\Delta \bar{\vartheta}_{k12} = \frac{T_{1-2}}{2 \tau \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}} (1 - \sqrt{\varepsilon_1 \varepsilon_2}), \quad (15)$$

die durchwegs zu hohe Werte liefert, wenn sinngemäß $\vartheta_{m12} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 J_1 J_2 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\varepsilon_1 \varepsilon_2}}$ gesetzt wird, und in Abb. 6 mit I bezeichnet ist.

Beispielsweise für drei Verbraucher, $\frac{T_1}{T_2} = 85\%$, $\frac{T_2}{T_3} = 85\%$, $\frac{T_1}{T_3} = 72.25\%$, erhält man nach der Hauptkurve der Abb. 4 und Gl. (7a):

$$\bar{\vartheta}_3 = \frac{1}{3 \varepsilon (1 + 2 \varepsilon)} (0.290 + 0.284 + 0.279 + 0.232 + 0.211 + 0.213) = \frac{8 \cdot 1.509}{9} = 1.341$$

gegenüber

$$\frac{8}{9} \left[0.289 + 0.283 + 0.278 + 0.125 \left(3 + \frac{5 \frac{2}{3} \cdot 1.85 + 2.6}{4.8} \right) \right] = \frac{8}{9} 1.566 = 1.392$$

nach (14); die Näherung ergibt einen nur um 3.80% zu hohen Wert.

Die Zulässigkeitsgrenze für drei Verbraucher liegt bei $\frac{\tau}{T_1} = \frac{34.1}{5} \cdot 2.4 = 16.4$, also etwas unter 17. Bezogene Zeitkonstanten, die bei $\varepsilon = 25\%$ über 17 liegen, sind also für drei Verbraucher unbedenklich.

In analoger Weise erhält man für unendlich viele Verbraucher nach (8) und Abb. 4 b für $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_m = 0.85$, $\varepsilon = 25\%$ und $\left(\frac{\tau}{T}\right) = 2.4$: $\vartheta_\infty = \frac{0.232}{2} 4^2 = 1.856$; die Zulässigkeitsgrenze liegt bei $\frac{\tau}{T_1} = \frac{85.6}{5} \cdot 2.4 = 41.2$, also etwas unter 42. Für höhere $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_m$ kann sie noch etwas höher liegen. Der errechnete Wert entspricht bei $\tau = 30$ Minuten = 1800 Sekunden einer Spieldauer $T_{1m} = \frac{1800}{42} = 42.8$ Sekunden, die aber wegen außerordentlich geringer Häufigkeit überschritten werden kann.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Summenperiode bei unendlich vielen Verbrauchern einerseits unendlich lang wird, so daß die größte mögliche Temperaturspitze erst in dieser Zeit wenigstens einmal, also außerordentlich selten auftritt, daß aber andererseits $\frac{T_2}{T_1}$ und damit $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_m$ mit zunehmender Verbraucherzahl näher an den Synchronpunkt heranrückt. Ist $\left(\frac{T_2}{T_1}\right)_m$ einigermaßen verlässlich bestimmbar, so kann für zahlreiche Verbraucher eine höhere größtmögliche Temperaturspitze zugelassen werden als 5% , so daß für unendlich viele Verbraucher zumeist keine größere bezogene Zeitkonstante angegeben werden muß als für etwa drei Verbraucher; im übrigen sei auf den letzten Absatz des Kapitels 3a hingewiesen.

Ist $\frac{T_2}{T_1}$ größer als 85% bei $\varepsilon = 25\%$, oder allgemein beträchtlich größer als $(1 - \varepsilon)$, so gibt (14) zu hohe Werte; $\Delta \bar{\vartheta}_{k12}$ kann dann ersetzt werden durch

$$\Delta \bar{\vartheta}_{k12} = -\frac{2 T_{1+2}}{2 \tau} \frac{1}{\varepsilon_1} (1 - \varepsilon_1) + \frac{(1 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_1 \sqrt{1 + \left(\frac{2 \pi \tau}{T_{1-2}}\right)^2}} \cos \left(\frac{T_1}{T_{1-2}} \arctg \frac{2 \pi \tau}{T_1} - \arctg \frac{2 \pi \tau}{T_{1-2}} \right), \quad (16)$$

wobei $T_{1+2} = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$ bedeutet und $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ vorausgesetzt ist.

Diese Kurve ist in Abb. 6 eingetragen und mit III bezeichnet. Sie liegt wohl im oberen Bereich etwas zu hoch, kann aber, von den ausgeprägten Resonanzlinien Nr. 2, 3 und 15 abgesehen, im Bereich $\frac{T_2}{T_1} =$ etwa $32^{1/2}$ bis 100% angewendet werden. In der Abbildung wird sie unterhalb $\frac{T_2}{T_1} =$ etwa $32^{1/2}\%$ durch die Kurve IIIa nach links fortgesetzt, die dem ersten Glied des Ausdruckes (16) allein entspricht. Dieses erste Glied ist eine Funktion von T_{1+2} , während das zweite Glied des Ausdruckes (16) eine Funktion von T_{1-2} ist. Dem Ausdruck (16) liegt folgende physikalische Vorstellung zugrunde: Würde der Pendelungsstrom sinusförmig verlaufen, so erhielte man für die phasenverschobene Abbildung des Maximums der Verlustkurve:

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_{k12} = & \sqrt{\varepsilon_1 (1 - \varepsilon_1) \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_2)} \left[\frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 \pi \tau}{T_{1+2}}\right)^2}} \cos \left(\frac{T_1 + T_2}{T_2} \arctg \frac{2 \pi \tau}{T_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \arctg \frac{2 \pi \tau (T_1 + T_2)}{T_1 T_2} \right) + \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 \pi \tau}{T_{1-2}}\right)^2}} \cos \left(\frac{T_1 - T_2}{T_2} \arctg \frac{2 \pi \tau}{T_1} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \arctg \frac{2 \pi \tau (T_1 - T_2)}{T_1 T_2} \right) \right]. \quad (16a) \end{aligned}$$

Das erste Glied des Klammerausdruckes konvergiert für $T_2 = T_1$ gegen $\frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{4 \pi \tau}{T_1}\right)^2}} \cdot \cos \left(2 \arctg \frac{2 \pi \tau}{T_1} - \arctg \frac{4 \pi \tau}{T_1} \right)$ mit der kleinsten aller möglichen Amplituden, das zweite Glied konvergiert gegen 1; im Synchronismus überwiegt also das zweite Glied. Für $T_2 = 0$ hingegen konvergiert das erste Glied gegen $\frac{-1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 \pi \tau}{T_1}\right)^2}}$, das zweite Glied gegen $\frac{+1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2 \pi \tau}{T_1}\right)^2}}$, beide Glieder haben dieselbe Amplitude und ergeben die Summe 0.

Für zwei Belastungen rechteckigen Verlaufes trifft (16a), die sinusförmigen Verlauf zur Voraussetzung hat, keineswegs zu. Das erste Glied wurde in (16) der Rechteckform angeglichen, indem es auf $\frac{2 T_{1+2}}{2 \tau} \frac{1}{\varepsilon_1} (1 - \varepsilon_1)$ abgeändert wurde; beim zweiten Glied wurde der Wurzelausdruck durch $\frac{1}{\varepsilon_1} \varepsilon_2 (1 - \varepsilon_1)$ ersetzt, damit die Größe der Schwebung von der Spieldauer T_{1-2} mit der Änderung des Effektivstromes beim Übergang zum Synchronismus besser übereinstimmt.

Die Argumente der cos-Funktionen in (16) und (16a) bedeuten die Phasenverschiebung, die sich zwischen der phasenverschobenen Abbildung von J_1^2 mit der Spieldauer T_1 und der von $J_1 J_2$ mit der Spieldauer T_{1-2} bzw. T_{1+2} ergibt. Nach den Gl. (16) und (16a) werden die beiden Glieder der Kombinationstemperatur nur

⁷ Die in E. u. M. 1947, S. 9, angegebene Gleichung enthält für $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ eine etwas größere Reserve.

mit ihrer Komponente in der Richtung von $\vartheta_{\max 1}$ zugeschlagen; die exakte geometrische Zusammensetzung würde nicht nur sehr viel mehr Mühe machen, da es sich um Vektoren handelt, die mit verschiedener Winkelgeschwindigkeit umlaufen; sie würde sogar noch etwas höhere Werte und damit noch etwas größere Abweichungen gegenüber den exakten Werten für Rechteckform bringen. Es wird also einfacher und besser mit der phasenverschobenen Abbildung des Maximums der Verlustkurve gerechnet, als mit dem Maximum der phasenverschobenen Abbildung selbst. Allerdings empfiehlt es sich nicht, mit negativen Werten des zweiten Gliedes zu rechnen, weil die cos-Funktion des ersten Gliedes in Angleichung an die Rechteckform durch eine Konstante ersetzt worden ist, so daß die rasche Abnahme des zweiten Gliedes durch keine Zunahme des ersten Gliedes vermindert wird, und weil für kleine Werte von $\frac{T_2}{T_1}$, um der exakten Kurve näherzukommen, höhere Temperaturwerte erwünscht sind. Kurve III ist daher nur bis zu jenem Wert von $\frac{T_2}{T_1}$ gültig, für den das Argument des Kosinus $\frac{\pi}{2}$ beträgt, für den also das zweite Glied Null wird. Kurve IIIa, die nur das erste Glied allein enthält, setzt also an dieser Stelle die Kurve III stetig fort; etwa von 32 $\frac{1}{2}$ % bis 23% ergibt sie die besten Näherungswerte. Von Kurve III ist der oberste Teil von größerer Wichtigkeit, weil die exakte Berechnung dieser Betriebspunkte ganz besonders mühevoll ist.

Im Bereiche von $\frac{T_2}{T_1} = 0$ bis 69% überwiegt der Einfluß der ausgeprägten Resonanzlinien Nr. 2 bis 22; die zugehörigen Betriebspunkte, die in Abb. 4 mit 100 bezeichnet sind, können für $\frac{\tau}{T_1} \geq 3$ nach der einfachen Gleichung bestimmt werden:

$$\Delta \bar{\vartheta}_{k \text{ res}} = \frac{(1 - \varepsilon_2) T_1}{2 \tau}; \quad 2 \Delta \vartheta_{k \text{ res}} = \Delta \bar{\vartheta}_{k \text{ res}} 2 \vartheta_{m \text{ res}} = \frac{(1 - \varepsilon_2) T_1}{2 \tau} 2 \frac{k}{n} \varepsilon_2, \quad (17)$$

wobei $n T_2 = T_1$ und $\vartheta_{m \text{ res}} = \bar{\vartheta}_{k \text{ res}}$ nach (9) gesetzt ist.

Für $\frac{\tau}{T_1} < 3$ können die genaueren Werte den voll ausgezogenen Linien der Abb. 2 entnommen werden.

Der geradlinigen Verbindungslinie der Endpunkte der Resonanzlinien 1, 5, 9 usw. entspricht in Abb. 6 die nahezu gerade Linie IV, der Verbindungslinie 1, 2, 3, 4 entspricht die Nahezugerade V usw. Die Näherungsgleichungen der entsprechenden Geraden sind in der Abbildung angegeben. Diese Zulässigkeitsgrenzen schließen die Resonanzlinien mit ein. Im unteren Bereich wird es vielfach genügen, die beiden benachbarten ausgeprägten Resonanzlinien nach (17) zu bestimmen, um über die Zulässigkeit der Temperaturspitze zu entscheiden. Genügt es nicht, so wird man die beiden nächstliegenden einigermaßen rasch berechenbaren Resonanzpunkte rechnen und sich nur dann zur Berechnung von $2 \vartheta_k$ mit Hilfe der mitunter sehr gliederreichen Summe nach (5a) entschließen, wenn alle diese einfacheren Rechnungen keine Entscheidung gestatten. Für überschlägige Ermittlungen kann nach der Geraden VI gerechnet werden.

6. Andere periodische Belastungskurven.

Für die Bestimmung der größten möglichen Temperaturspitze wurde die Rechteckform der Belastung nach Abb. 1 nicht nur deshalb zugrunde gelegt, weil sie dem praktischen Vorgang des Ein- und Ausschaltens von Motoren, Öfen, Glühlampen und anderen Verbrauchern am besten entspricht, sondern auch weil sie die einzige Kurvenform darstellt, die in besonders einfacher und eindeutiger Weise die größte mögliche Kombinationstemperatur zu ermitteln gestattet. Bei der Sinusform muß die ungünstigste gegenseitige Lage der zwei oder mehr Verbraucher erst durch Differentiation

bestimmt werden. Bei der linear abnehmenden Belastung erfordert sogar die Bestimmung der Höchsttemperatur des einzelnen Verbrauchers bereits eine Differentiation. Nur bei einer linear ansteigenden Belastung, die ein- und ausgeschaltet wird, steht die ungünstigste gegenseitige Lage der beiden Verbraucher in ähnlicher Weise von vornherein fest, wie bei einer Belastung nach Abb. 1. Die Addition würde aber hier eine zusätzliche Integration erfordern, weshalb auch dieser Sonderfall außer Betracht bleiben möge.

Die Vorteile der Rechteckform legen den Gedanken nahe, jede andere Kurve durch ein oder mehrere Rechtecke zu ersetzen und auf diese Weise die Temperaturspitze hinreichend genau zu berechnen. Begnügt man sich mit einem einzigen Rechteck, so wird man nach Ausscheidung eines etwa vorhandenen stationären Belastungsteiles die Einschaltdauer $\varepsilon = \frac{J_m^2}{J_{\text{eff}}^2}$ setzen. Mit Hilfe dieses Ansatzes kann man die Temperaturspitze jedes beliebigen periodischen Belastungsverlaufes wie eine Rechteckform behandeln. Dabei ergeben sich für die einzelnen Verbraucher Höchsttemperaturen, die bei ansteigender Belastung tiefer, im betriebsmäßig häufigeren Falle der abnehmenden Belastung aber höher liegen als die wahren Werte, deren genaue Bestimmung übrigens nicht schwierig ist. Für die größte mögliche Kombinationstemperatur muß vor allem unterschieden werden, ob die Kombinationsverluste $\sqrt{V_1(t) V_2(t)} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, und zwar insbesondere für die länger dauernden Summenbelastungen, überwiegend zunehmen oder abnehmen; im ersten Falle ist eine höhere, im zweiten Falle eine niedrigere Kombinationstemperatur zu erwarten. Ist kein Überwiegen feststellbar, so bewirkt die meist konvexe Abweichung von der Rechteckform eine niedrigere wahre Kombinationstemperatur, während die konkave Abweichung eine höhere Kombinationstemperatur zur Folge haben würde. Sind die beiden Belastungsamplituden gleich groß, so bringt die Abweichung von der Rechteckform Abweichungen vom größtmöglichen Produkt und damit ebenfalls eine niedrigere Kombinationstemperatur: man sieht, daß von überwiegend zunehmenden Kombinationsverlusten abgesehen, eine niedrigere Kombinationstemperatur zu erwarten ist als für die Rechteckform. Dabei sind die Abweichungen der Kombinationstemperaturen bedeutend geringer als die zugehörigen Abweichungen der Höchsttemperaturen der einzelnen Verbraucher, wenn die exakten Temperaturwerte mit den nach der äquivalenten Rechteckform gerechneten verglichen werden.

7. Unperiodische Belastungen.

Eine unperiodische Belastung muß durch ausführliche Angaben, etwa durch eine Belastungskurve über einen längeren Zeitraum gegeben sein. Exakt unperiodisch sind nur einmalige Vorgänge. Wiederholen sie sich auch nur einmal, so können sie schon als nach der Periode T wiederkehrend, also in diesem Sinne als periodisch bezeichnet werden. Wiederholen sie sich öfter, so können sie als quasiperiodisch bezeichnet werden und nach Kapitel 3a behandelt werden. Man bezeichnet aber auch solche Belastungen in weiterem Sinne als unperiodisch, bei denen eine Periode länger als etwa 5τ dauert, weil dann der Einfluß der vorhergehenden Periode auf die ablaufende Periode vernachlässigbar gering ist. In diesem weiteren Sinne heißt der Belastungsvorgang zweischichtig arbeitender Fabriken unperiodisch, obwohl er sich täglich wenigstens quasiperiodisch wiederholt. Derartige unperiodische Belastungen werden nach bekanntem graphischem Verfahren, am besten unter Zuhilfenahme von Logarithmenpapier behandelt.⁸

⁸ Vgl. beispielsweise: Seefehlner: ETZ 1921, S. 193, 227, 253, „Zeichnerische Rechenbehelfe für den Entwurf und den Betrieb elektrischer Bahnen“, oder Winkler: E u. M 1925, S. 233 u. 256, „Erwärmungsproblem im elektrischen Lokomotivbetrieb“.

Von Wichtigkeit ist der Fall, daß eine periodische oder quasiperiodische Belastung mit einer unperiodischen zusammengesetzt ist. Das geschieht ebenfalls am genauesten auf graphischem Wege, wobei die Summenbelastung für den ganzen Zeitraum der unperiodischen Belastung zu bilden und daraus der Verlauf der Summentemperatur zu bestimmen ist. Hierdurch kann nicht nur die größere Belastbarkeit eines Leiters während der „Anlauf“zeit, sondern auch der ununterbrochen stationäre oder auch periodische Betrieb eines Teiles der im übrigen unperiodischen Belastung berücksichtigt werden. Die Bildung von Kombinationstemperaturen bietet keine Vorteile für eine genaue Ermittlung.

Nur wenn eine überschlägige Temperaturbestimmung Aussicht auf Erfolg verspricht, kann auch hier die graphische Rechnung vermieden werden; denn auch für eine unperiodische Belastung kann ein $\varepsilon_1 = \frac{J_{m1}^2}{J_{eff1}^2}$ angegeben werden. Ferner kann die größte aller Überschußflächen von der Dauer t bestimmt werden. Daraus kann eine fiktive Spieldauer $T_1 = \frac{t}{\varepsilon_1}$ und die höchste Temperaturspitze (etwas zu hoch) ermittelt werden zu:

$$\Delta \bar{\vartheta}_{\max 1} = \frac{T_1}{2\tau} (1 - \varepsilon_1) = \frac{t}{2\varepsilon_1\tau} (1 - \varepsilon_1) = \frac{t}{2\tau} \left(\frac{J_{eff1}^2}{J_{m1}^2} - 1 \right). \quad (18)$$

Die zugehörige Kombinationstemperaturspitze beträgt nach (14)

$$\Delta \bar{\vartheta}_k = \frac{T_{1-2}}{2\tau} (1 - \varepsilon_1 \varepsilon_2); T_{1-2} = \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} = \frac{t T_2}{t - \varepsilon_1 T_2}; \Delta \bar{\vartheta}_k = \frac{t T_2}{t - \frac{J_{m1}^2}{J_{eff1}^2} T_2} \left(1 - \frac{J_{m1}^2}{J_{eff1}^2} \varepsilon_2 \right). \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\vartheta}_2 &= \Delta \bar{\vartheta}_{\max 1} \frac{\vartheta_{m1}}{\vartheta_m} + \Delta \bar{\vartheta}_{\max 2} \frac{\vartheta_{m2}}{\vartheta_m} + \Delta \bar{\vartheta}_k \frac{2 \vartheta_{m12}}{\vartheta_m} = \\ &= \frac{1}{J_{eff1}^2 + 2 J_{m1} \varepsilon_2 J_2 + \varepsilon_2 J_2^2} [\Delta \bar{\vartheta}_{\max 1} J_{eff1}^2 + \Delta \bar{\vartheta}_{\max 2} \varepsilon_2 J_2^2 + \Delta \bar{\vartheta}_k 2 J_{m1} \varepsilon_2 J_2]. \quad (20) \end{aligned}$$

Wenn $\Delta \bar{\vartheta}_2$ auch etwas zu hoch ermittelt ist, wird es doch in zahlreichen Fällen für den Zulässigkeitsnachweis genügen.

8. Andere Anwendungsmöglichkeiten des ermittelten Verlaufes der größtmöglichen Kombinationstemperatur.

Es war zu erwarten, daß die untersuchte Rechteckform gewisse Resonanzeigenschaften aufweisen werde. Überraschend ist jedoch die Steilheit des Temperaturanstieges unterhalb der Werte:

$$T_2 = \frac{T_1}{2}, \quad \text{tg } \alpha_u = 0.0956245 \text{ je } \% : \frac{\text{tg } \alpha_u}{2 \vartheta_k} T_2 \doteq 17,$$

$$T_2 = \frac{T_1}{3}, \quad ,, ,, = 0.1429961 \text{ je } \% : \quad ,, ,, \doteq 25,$$

$$T_2 = \frac{T_1}{5}, \quad ,, ,, = 0.4953602 \text{ je } \% : \quad ,, ,, \doteq 40,$$

während sie unterhalb $T_2 = T_1$ nur $\frac{0.04896897}{0.58061438} 100 \doteq 9$ beträgt.

Durch geeignete Wahl der Frequenz und Kurvenform können diese an sich brauchbaren Werte noch weiter erhöht und technisch verwertet werden. Es kann durch eine Frequenzänderung von wenigen Promill eine beträchtliche vorübergehende Höchsttemperatur hervorgerufen bzw. vermieden werden.

Eine andere Aussicht scheint sich auf dem Gebiete der experimentellen Untersuchungen zu eröffnen: Zwischen der größtmöglichen Verlustwärme von zwei Energie-

übertragungen in einem gemeinsamen Leiter und der von einem Belastungswiderstand bei den beiden Wechselspannungen E_1 und E_2 aufgenommenen größten möglichen Leistung besteht eine weitgehende Analogie, indem erstere $V = \varrho (i_1 + i_2)^2$, letztere $L = \frac{(E_1 + E_2)^2}{r}$ beträgt, wenn die Kurvenformen der beiden Spannungen den beiden Stromkurven ähnlich sind. Der Belastungswiderstand wird L in Form von Wärme genau so abzugeben suchen wie der gemeinsame Leiter V . Für die größte mögliche Kombinationstemperatur gilt in beiden Fällen dasselbe Gesetz. Es ist sogar unwesentlich, in welcher Weise die Energie dem Belastungswiderstand zugeführt wird. Dies kann beispielsweise durch Strahlung geschehen und als Belastungswiderstand oder allgemeiner als Vierpol kann ein beliebiger Stoff dienen, der die Strahlungsenergie in Wärme umsetzt. Wird die Frequenz der einen Strahlung verändert und gelingt es, die für jeden Frequenzwert größte erreichte Temperatur zu messen, so sind Rückschlüsse über den Kurvenverlauf der unveränderten Strahlung möglich; für die Rechteckform enthält diese Arbeit die kennzeichnenden Temperaturresonanzlinien. Für andere Kurvenformen lassen sie sich in verhältnismäßig einfacher Weise berechnen. Auch Absorptions- und sekundäre Emissionsvorgänge lassen sich, wenn die Maximaltemperaturmessung gelingt, in ähnlicher Weise untersuchen, wobei zu beachten ist, daß beide zu einer beträchtlichen Erhöhung der scheinbaren Wärmekapazität und damit, wie erwünscht, zu einer hohen Zeitkonstanten und zu besonders schmalen Resonanzlinien führen. Die Absorption oder auch die sekundäre Emission in einer anderen Energieform können als sekundäre Belastung des Vierpoles aufgefaßt und, falls sie meßbar sind, mitberücksichtigt werden; sie können sogar, wenn sie gut meßbar sind, die zweite Primärstrahlung ersetzen, so daß die Untersuchung mit einer einzigen veränderlichen Primärstrahlung durchgeführt werden kann. Es sei an dieser Stelle nur noch hervorgehoben, daß die Temperaturresonanzlinien Oberwellen enthalten und daher mit den Spektrallinien nicht übereinstimmen, daß sie aber gewisse Schlüsse über die Lage der Oberwellen zur Grundwelle, also über den Kurvenverlauf zulassen, die die Spektralanalyse grundsätzlich nicht gestattet.

9. Schlußwort.

Durch die vorliegende Arbeit wurden die Grenzen für das Rechnen mit effektiven Komponenten dadurch bestimmt, daß die größte mögliche Temperaturspitze, besonders für den Fall der Überlagerung von zwei oder mehreren rechteckig verlaufenden Belastungsströmen, untersucht worden ist. Dabei erwies sich der Begriff der Kombinationstemperatur als vorteilhaft, mit dessen Hilfe die größte mögliche Summentemperatur in ähnlich einfacher Weise aus Temperaturanteilen zusammengesetzt werden kann, wie der effektive Summenstrom sich aus den effektiven Stromkomponenten mit Hilfe des Pendelungsstromes zusammensetzen läßt. Der Verlauf der Kombinationstemperatur wird als Grenzwert einer Summe von resonanzbedingten Gliedern in hohem Maße durch Resonanzlinien bestimmt, die in denkbar einfachster Weise berechnet werden können und für eine Reihe verschiedener Einschalt Dauern angegeben worden sind. Viele Resonanzspitzen der Kombinationstemperatur sind so ausgeprägt, daß sie auch in der größtmöglichen Summentemperatur deutlich hervortreten und daher durch geeignete Wahl der relativen Spieldauer mit beträchtlichem Vorteil vermieden oder aber — soweit sie erwünscht sind — technisch ausgenützt werden können.

Der Verlauf der Kombinationstemperatur als Funktion der relativen Spieldauer ist für jede Einschaltdauer rechteckigen Verlaufes und auch für jeden anderen Belastungsverlauf so kennzeichnend, daß er sogar für experimentelle Untersuchungen von Vorgängen brauchbar sein dürfte, die der unmittelbaren Messung unzugänglich sind. Bei

der großen Bedeutung, die der intermittierenden Energieübertragung in Natur und Technik zukommt, glaubt der Verfasser durch die vorliegende Untersuchung der größtmöglichen Temperaturspitze nicht nur den Elektrotechnikern, sondern vielleicht auch den Physikern und Maschinenbauern eine brauchbare Unterlage für weitere Entwicklungen und Versuche an die Hand gegeben zu haben.

(Eingegangen am 29. Oktober 1947.)

Der Erddruck auf Stützmauern als ebenes Spannungsproblem.

Von H. Kastner, Innsbruck.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Von den Voraussetzungen der Gleitungstheorie ausgehend, wird der Erddruck auf Stützmauern unter Betrachtung eines ebenen Spannungszustandes im kohäsionslosen Boden berechnet. Die Form der Spannungsfunktion wird hierbei in erster Annäherung frei gewählt, jedoch so, daß sie den Randbedingungen an der Bodenoberfläche genügt. Die Randbedingungen an der Stützfläche liefern die Freiwerte. Eine Besserung des Rechnungsergebnisses durch Erweiterung der Spannungsfunktion zu einer Funktionenreihe wird durchgeführt. Die Untersuchungen bleiben auf den Fall lotrechter Stützfläche und waagrechter Bodenoberfläche beschränkt, lassen sich aber leicht für beliebige Neigung dieser Flächen erweitern.

Summary. With the assumptions made in the sliding-theory, the lateral earth-pressure on retaining-walls is calculated as a problem of two-dimensional stress distribution in a non-coherent soil. As a first approximation, the stress function is chosen freely, but so as to satisfy the boundary conditions on the surface of the soil. The boundary conditions on the retaining-wall yield the exact values of the estimated coefficients. An improvement of the result of the computation is made by developing the stress function into a series of functions. The investigation has been limited to the case of a vertical retaining-wall and a horizontal soil-surface, but may easily be extended to any inclination of these planes.

Résumé. Partant des hypothèses admises dans la théorie de glissement, la poussée terrestre sur les murs de soutènement est calculée en considérant un état de tensions bi-dimensionnel dans un terrain sans cohésion. En première approximation, la forme de la fonction de tension est choisie librement, mais de manière telle qu'elle satisfasse les conditions marginales à la surface du sol. Les conditions marginales à la surface du plan de poussée fournissent la valeur définitive des coefficients, choisis librement d'abord. Le résultat du calcul est amélioré en développant en série la fonction de tension. Les conclusions ne s'appliquent qu'au cas d'une surface d'appui verticale et d'un sol horizontal, mais il est facile de tenir compte d'une inclinaison quelconque de ces deux plans.

Bei der Beurteilung der Coulombschen Erddrucktheorie und der aus ihr hervorgegangenen klassisch gewordenen Berechnungsverfahren gilt heute die Meinung, daß die gewonnenen Ergebnisse infolge ihrer guten Übereinstimmung mit der Wirklichkeit brauchbar sind und daß sie der aus der praktischen Anwendbarkeit erwachsenden Forderung nach Einfachheit entsprechen. Gleichzeitig wird jedoch zugestanden, daß die klassische Erddrucklehre einer strengen Befolgung der Gesetze vom Gleichgewicht der Kräfte aus dem Wege geht. Der Vorzug ihrer Einfachheit ist aber so groß, daß dieser bekannte Mangel als gegeben hingenommen wird.

Aber auch die Anschauung, daß die Coulombsche Lehre mit der Wirklichkeit in guter Übereinstimmung steht, ist nur in begrenztem Umfang zutreffend und die Beschränkung ihrer Zuverlässigkeit ist von größerer Bedeutung, als allgemein angenommen wird. Die Tatsache, daß die Coulombsche Lehre für den Erdwiderstand bei lotrechter Stützfläche und waagrechter Bodenoberfläche versagt, wenn die Wandreibung größere, an die Ziffer des inneren Gleitwiderstandes herankommende Werte annimmt, wird oft erwähnt. Seltener findet man einen Hinweis darauf, daß sie bei geneigter Stützfläche irgendwie unzutreffende Werte liefert.

Damit sind aber die Unstimmigkeiten der Coulombschen Theorie gegenüber der Wirklichkeit nur andeutungsweise, aber keineswegs erschöpfend angeführt. An Versuchen, hierin Abhilfe zu schaffen und damit eine widerspruchsfreie, d. h. im Sinne der Gleitungstheorie strenge Berechnung des Erddruckes zu entwickeln, hat es nicht gefehlt. Sie knüpfen sich an die Namen Kötter, v. Kármán, v. Jáký und Ohde.¹ In keinem Fall ist es jedoch gelungen, die Berechnungsweise so einfach zu gestalten, daß die Praxis sich ihrer bedienen könnte.

Die nachstehenden Darlegungen stellen den Versuch dar, eine widerspruchsfreie Lösung des Erddruckproblems in einer praktisch verwendbaren Form herbeizuführen. Die Knappheit des hierfür zur Verfügung stehenden Raumes zwingt jedoch zur Beschränkung auf den Fall der lotrechten Stützfläche bei waagrechter Bodenoberfläche.

1. Grundlagen der Theorie des Erddruckes auf Stützmauern.

Die Voraussetzungen, die hinsichtlich der Bodenbeschaffenheit getroffen werden, lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- a) Der Boden wird als homogen und kohäsionslos angenommen.
- b) Für die Gleitbewegung gilt das Coulombsche Reibungsgesetz, welches besagt, daß die Ziffer des inneren Gleitwiderstandes unabhängig von der Pressung in der Gleitfläche, von der Größe der Druckfläche sowie von der Gleitgeschwindigkeit ist und daß der Gleitwiderstand während des Ablaufes der Gleitbewegung konstant bleibt.
- c) Die sonstigen Formänderungen des Bodens sind gegenüber jenen, die durch die Gleitbewegung hervorgerufen werden, vernachlässigbar klein.

Im Rahmen der Gleitungstheorie sind zutreffende Ergebnisse für den Erddruck und Erdwiderstand nur dann zu erwarten, wenn die Ausbildung der Gleitflächen in dem gestützten oder hochgepreßten Bodenbereich zwanglos erfolgen kann. Ist diese Bedingung erfüllt, dann ist die lineare Zunahme der Pressungen an der Stützfläche mit der Tiefe tatsächlich vorhanden und im Versuchswege bestätigt. Ein solches Verhalten ist bei freistehenden Stützmauern, die mit hinreichender Genauigkeit als starr angesehen werden können, gegeben, weil sich bei der Abgleitung des Erdkeiles auslösenden natürlichen Bewegung einer solchen Stützmauer, also bei einer Drehung um eine in der Höhe des Mauerfußes gelegene waagrechte Achse, die Gleitfläche frei entwickeln kann. Wenn aber infolge der baulichen Ausbildung der Stützwand oder wegen ihrer Verformung eine anders geartete Bewegung Zwangswirkungen im Boden auslöst oder nicht verhindert, dann muß die ihrem Wesen nach nur für eine statisch bestimmte, d. h. von der Art der Mauerbewegung unabhängige Wechselwirkung zwischen Stützwand und Boden geltende Gleitungstheorie versagen. Hat beispielsweise die Stützmauer das Bestreben, sich um eine über ihrer Sohle gelegene Achse zu drehen, wobei der Mauerfuß unter der Wirkung des Erddruckes ausweicht, dann entstehen in den höheren Teilen des Bodenbereiches gewölbeartig wirkende Verspannungszonen und der Verlauf der Pressungen an der Stützfläche wird von der Art der Bewegung der Mauer abhängig. Ähnliche Wirkungen sind zu erwarten, wenn die Stützwand elastische oder sonstige Formänderungen von nennenswertem Ausmaß erfahren kann. Erscheinungen solcher Art, die sich einer theoretischen Behandlung bisher entzogen haben, werden in den folgenden Darlegungen nicht berücksichtigt und es bleibt die Annahme aufrecht erhalten, daß die Pressungen an der Stützmauer rückfläche mit der Tiefe geradlinig zunehmen.

Liegt der Coulombschen Erddrucklehre die Annahme zugrunde, daß die Spannungen

¹ Eine übersichtliche Zusammenstellung dieser Verfahren findet sich in der Arbeit: „Zur Theorie des Erddruckes unter besonderer Berücksichtigung der Erddruckverteilung“ von Ing. J. Ohde, Bautechn. H. 19 (1938).

nicht nur an der Stützfläche, sondern im gesamten abgleitenden oder hochgepreßten Bodenbereich und somit auch in der Gleitfläche geradlinig mit der Tiefe unter der Bodenoberfläche zunehmen und wird gleichzeitig die Voraussetzung beibehalten, daß die Gleitflächen eben verlaufen, dann treten die bekannten Widersprüche auf. Ein Gleichgewichtszustand des Gleitkeiles, der den Beginn der Gleitung folgerichtig mitumfassen muß, ist unter diesen Voraussetzungen nur dann möglich, wenn die Reibungsziffer zwischen der Stützfläche und dem Boden einen bestimmten Wert besitzt. Ist beispielsweise die Wand lotrecht, dann kann Gleichgewicht nur bestehen, wenn der Erddruck parallel zur Bodenoberfläche gerichtet ist. Für jede Anordnung, die durch die Neigung der Stützwand und durch den Verlauf der eben angenommenen Bodenoberfläche gegeben ist, läßt sich ein bestimmter Wert der Wandreibung, gekennzeichnet durch den Reibungswinkel δ , angeben, bei dem die Gleichgewichtsbedingungen für den entlang einer Ebene in Bewegung geratenden Bodenkeil erfüllbar sind. Die hierbei auftretenden Erscheinungen erfaßt die Rankinesche Theorie, die also nur für zufällig mögliche Bedingungen gilt und deshalb zur Beschreibung des gesamten Aufgabenkreises der Erddrucklehre nicht herangezogen werden kann. Liegen aber die Bedingungen hinsichtlich der Wandreibung anders, dann muß die Rankinesche Lehre versagen, und zwar um so mehr, je weiter sich der wirkliche Wert der Wandreibung von jenem entfernt, der den Rankineschen Sonderfall zufällig herbeiführt; eine ebene Form der Gleitflächen ist dann aber nicht mehr möglich.

Die ebene Form der Gleitflächen kann also nur für den Rankineschen Sonderfall bestehen und sie ist dann allem Anschein nach auch tatsächlich vorhanden. In allen anderen Fällen ist es, um eine Verbesserung der Erddrucklehre und eine Beseitigung der ihr innewohnenden Widersprüche herbeizuführen, unerlässlich, diese Voraussetzung fallen zu lassen.

Um zu einer richtigen Beurteilung des Verlaufes der Gleitflächen zu kommen, ist es notwendig, alle Bedingungen festzuhalten, denen sie entsprechen muß. Der Winkel ϑ , den die Tangente an die Gleitfläche im Fußpunkt der Stützfläche mit der Waagrechten einschließt, läßt sich aus den bekannten Größen des an dieser Stelle herrschenden Spannungszustandes bestimmen. Der Winkel ϑ ist von der Ziffer des inneren Gleitwiderstandes $\operatorname{tg} \varrho$, von der Ziffer der Wandreibung $\operatorname{tg} \delta$ und von der Neigung der Stützwand α abhängig. Die Neigung der eben angenommenen Geländeoberfläche β hat auf seine Größe keinen Einfluß.

In einiger Entfernung von der Stützwand muß sich der Winkel, den die Tangente an die Gleitfläche mit der Waagrechten einschließt, jenem Wert ϑ_0 nähern, der dem Rankineschen Sonderfall entspricht.

Der Winkel ϑ_0 ist nur von der Ziffer des inneren Gleitwiderstandes des Bodens $\operatorname{tg} \varrho$ und von der Neigung der Bodenoberfläche β abhängig. Die Neigung der Stützfläche α beeinflusst ihn nicht.

Für die Bestimmung der Neigungswinkel ϑ und ϑ_0 stehen verschiedene Wege zur Verfügung. Häufig wird hierzu die Winklersche Spannungsellipse herangezogen. Viel einfacher und einen weitaus besseren Einblick bietend, gestaltet sich jedoch die Anwendung der Mohrschen Theorie der Bruchgefahr.

Nach den getroffenen Voraussetzungen über die Bodenbeschaffenheit ist die Einhüllende im Mohrschen Bild der Bruchgefahr (Bruchlinie) eine gerade Linie, die durch den Ursprung des Spannungszustandes geht und mit der Spannungsachse den Winkel des inneren Gleitwiderstandes ϱ einschließt.

Für die Berechnung des Erddruckes bei gekrümmten Gleitflächen ist die Kenntnis des zweiachsig angenommenen Spannungszustandes im Gleitkeil notwendig. Um hierfür zu einer brauchbaren Lösung zu gelangen, wird über die Voraussetzungen der klassischen Erddrucklehre hinausgehend und von ihr abweichend die Annahme

getroffen, daß der Spannungsverlauf in dem Bodenkeil, dessen Spitze die Oberkante der Mauer und dessen Schenkel einerseits die Stützfläche und andererseits die Bodenoberfläche bilden, zentral-perspektiv ist, daß also entlang jedes Fahrstrahles, gekennzeichnet durch den Winkel φ (Abb. 1), die Spannungszustände ähnlich sind und daß die Spannungsgrößen verhältnismäßig mit der Entfernung vom Ursprung A wachsen. Das Zutreffen dieser Annahme läßt sich theoretisch nicht nachweisen, aber es bestehen viele Gründe dafür, daß sie als richtig hingestellt werden kann.

Zunächst gilt diese Bedingung voraussetzungsgemäß für die Schenkel des Keiles, also für die Ränder des betrachteten Bodenbereiches; auch gilt sie im gesamten Bodenbereich bei Vorhandensein des Rankineschen Spannungszustandes und es ist anzunehmen, daß der durch die Wandreibung geänderte Spannungszustand, der durch Überlagerung des Rankineschen Zustandes mit einer Störung entstanden gedacht werden kann, nicht bloß an den Rändern, sondern auch im Innern des Bodenkeiles der gleichen Bedingung unterliegt. Die durch die Wandreibung hervorgerufene Störung wird mit wachsender Entfernung von der Stützfläche abklingen und es ist mit großer Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß die Grenzlinie ihrer Wirksamkeit durch einen Radiusvektor gegeben ist. Auch dieser Umstand spricht für die Richtigkeit eines zentral-perspektiven Spannungszustandes.

Überdies bestätigt auch die Beobachtung des Gleitvorganges besonders beim Erddruck diese Annahme. Der abrutschende bzw. hochgepreßte Bodenkeil ist von einem ganzen System von Gleitflächen durchzogen, die im Sinne der getroffenen Annahme alle zentral-perspektiv verlaufen. Die äußerste, vom Stützwandfuß ausgehende Gleitfläche ist für die Beurteilung des Gleichgewichtszustandes maßgebend.

Damit sind die Grundlagen für die weitere Behandlung der Erddruckaufgabe festgelegt. Sie decken sich mit den Voraussetzungen der Coulombschen Erddrucklehre, mit der einzigen Abweichung, daß die Annahme der ebenen Form der Gleitflächen fallen gelassen wurde; andererseits wurde für den Spannungszustand im Boden ein zentral-perspektiver Verlauf vorausgesetzt.

2. Allgemeine Lösung der Erddruckaufgabe.

Während die Coulombsche Erddrucklehre die Gleichgewichtsbedingungen im Bodenkeil nicht vollauf beachtet und nur für die Einhaltung der Gleitbedingung in einer ebenen Fläche sorgt, gehen die nachfolgenden Untersuchungen von einer strengen Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen aus, unter der gleichzeitigen Bemühung, der Gleitbedingung soweit gerecht zu werden, als sich der dafür erforderliche Aufwand an mathematischer Arbeit rechtfertigen läßt, ohne also hierbei die Genauigkeit weiter zu treiben, als den praktischen Bedürfnissen entsprechend notwendig ist.

Die Annahme eines zentral-perspektiven Verlaufes der Spannungen führt zwangsläufig dazu, zur Lösung der Aufgabe Polarkoordinaten heranzuziehen.

Mit den Bezeichnungen der Abb. 1 gelten für den ebenen Spannungszustand im Polarnetz die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + r \cdot \gamma_r, \\ \sigma_\varphi &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + r \cdot \gamma_\varphi, \\ \tau &= - \frac{\partial^2}{\partial r \cdot \partial \varphi} \left(\frac{F}{r} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Die Spannungen werden hierin durch die Spannungsfunktion F ausgedrückt. Die Glieder γ_r und γ_φ stellen die Anteile der Massenkkräfte dar.

Diese Gleichgewichtsbedingungen gelten unabhängig von der Beschaffenheit des

Bodens. Für die Ermittlung der Spannungsfunktion F müssen jedoch die Eigenschaften des Bodens herangezogen werden. Bei der Untersuchung des Erddruckes auf Stützmauern besteht hierbei die Möglichkeit, eine Bedingung für die Spannungsfunktion aufzustellen, die den Grenzzustand des Gleichgewichtes beschreibt. Hierfür gilt die nachstehende, aus dem Mohrschen Spannungsbild (Abb. 2) hergeleitete Beziehung:

$$\sigma_r^2 - 2 \sigma_r \sigma_\varphi (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho) + \sigma_\varphi^2 + 4 \tau^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho) = 0. \quad (2)$$

Sie kann als Zustandsgleichung des Bodens für den Grenzzustand des Gleichgewichtes bezeichnet werden und enthält zur Kennzeichnung der Bodeneigenschaften lediglich die Ziffer des inneren Gleitwiderstandes $\operatorname{tg} \varrho$. Nachdem $\operatorname{tg} \varrho$ nur in der zweiten Potenz vorkommt, gilt die Zustandsgleichung in gleicher Form für den Erddruck und für den Erdwiderstand.

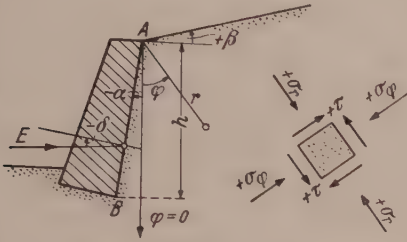


Abb. 1. Übersicht über die Anordnung des Polarkoordinatennetzes und Festlegung der Vorzeichen für die Spannungen und Winkel.

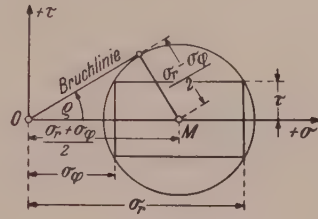


Abb. 2. Anwendung des Mohrschen Spannungsbildes zur Herleitung der Gleitbedingung.

Die Zustandsgleichung (2) bildet den Ausgangspunkt für die folgenden Betrachtungen. Zunächst lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen (1) unter der Voraussetzung einer zentral-perspektiven Spannungsverteilung noch vereinfachen. Damit die Differentialoperationen gemäß Gl. (1) zu einer solchen Spannungsverteilung führen, muß die Spannungsfunktion die Form

$$F = r^3 \cdot f(\varphi) \quad (3)$$

besitzen. Die Ausführung der Differentiationen gemäß Gl. (1) liefert die Ausdrücke

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} &= r \cdot f''(\varphi), \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} &= 3 r \cdot f(\varphi), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} &= 6 r \cdot f(\varphi), \\ \frac{\partial^2}{\partial r \cdot \partial \varphi} \left(\frac{F}{r} \right) &= 2 r \cdot f'(\varphi) \end{aligned}$$

und die Spannungen lassen sich in einfacherer Form darstellen wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= r [f''(\varphi) + 3 f(\varphi) + \gamma_r], \\ \sigma_\varphi &= r [6 f(\varphi) + f_\varphi], \\ \tau &= -2 r \cdot f'(\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Durch Einsetzen der Spannungswerte gemäß Gl. (4) in die Zustandsgleichung (2) erhält man zur Bestimmung der Funktion $f(\varphi)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die unter Berücksichtigung der Randbedingungen zu lösen wäre.

Auch in dieser vereinfachten Form gestaltet sich die Weiterführung der Rechnung noch immer sehr umständlich, weshalb man notgedrungen auf eine Näherungslösung hingewiesen wird. Ausgangspunkt hierfür bildet die Zustandsgleichung (2), welche

in der Form geschrieben werden kann

$$\Phi(\varphi) = 0. \quad (5)$$

Entwickelt man diese Funktion für den Rand $\varphi = \alpha$ in die Maclaurinsche Reihe, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = \Phi(\alpha) + \frac{\varphi}{1!} \cdot \Phi'(\alpha) + \frac{\varphi^2}{2!} \cdot \Phi''(\alpha) + \frac{\varphi^3}{3!} \cdot \Phi'''(\alpha) + \\ + \frac{\varphi^4}{4!} \Phi^{IV}(\alpha) + \dots \equiv 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Die Gl. (6) muß identisch erfüllt sein; das ist nur dann möglich, wenn die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\alpha) &= 0, \\ \Phi'(\alpha) &= 0, \\ \Phi''(\alpha) &= 0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

gelten.

Man kann nunmehr die Spannungsfunktion $f(\varphi)$ beispielsweise in Form einer Potenzreihe darstellen und dann nach dem Verfahren der unbestimmten Koeffizienten eine Lösung der Aufgabe herbeiführen.

Dieses in großen Zügen gekennzeichnete Verfahren ist aber nur von geringer Tragweite, weil die Zustandsgleichung (2) sämtliche Spannungen in der zweiten Potenz enthält. Man muß deshalb versuchen, sich durch besondere Methoden an eine möglichst genaue Lösung der Aufgabe heranzuarbeiten. Hierbei wird, wie bereits eingangs erwähnt wurde, nur die Anordnung mit lotrechter Stützfläche und waagrechter Bodenoberfläche in Betracht gezogen.

3. Der Rankinesche Sonderfall.

Wenn die Massenkkräfte, wofür nur das Eigengewicht γ des Bodens in Betracht kommt, eingeführt werden, dann lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= r [f''(\varphi) + 3f(\varphi) + \gamma \cdot \cos \varphi], \\ \sigma_\varphi &= r [6f(\varphi) + \gamma \cdot \cos \varphi], \\ \tau &= -2r \cdot f'(\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

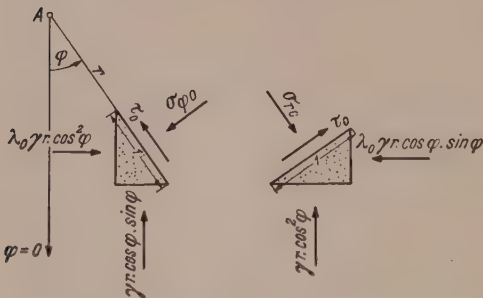


Abb. 3. Spannungen für den Rankineschen Sonderfall.

Um eine Grundlage für die Entwicklung des weiteren Rechnungsganges zu gewinnen, ist es zweckmäßig, zuerst die Spannungsfunktion für den Rankineschen Spannungszustand zu ermitteln.

Aus den Gleichgewichtsbedingungen für die Bodenelemente gemäß Abb. 3 ergeben sich die Spannungen für den Rankineschen Spannungszustand zu

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r0} &= \gamma \cdot r \cdot \cos \varphi (\cos^2 \varphi + \lambda_0 \sin^2 \varphi), \\ \sigma_{\varphi0} &= \gamma \cdot r \cdot \cos \varphi (\sin^2 \varphi + \lambda_0 \cos^2 \varphi), \\ \tau_0 &= \gamma \cdot r \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi (\lambda_0 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

und die Randspannungen für $\varphi = 0$ betragen

$$\begin{aligned} s_{r0} &= \gamma \cdot r, \\ s_{\varphi0} &= \lambda_0 \gamma \cdot r, \end{aligned}$$

$$t_0 = 0;$$

setzt man diese Werte in die Zustandsgleichung (2) ein, so erhält man die Ziffer des Erddruckes für den Rankineschen Sonderfall in der bekannten Form

$$\lambda_0 = \frac{1 + \sin \varrho}{1 - \sin \varrho} = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ + \frac{\varrho}{2} \right).$$

Hierbei ist ϱ für den Erddruck negativ, für den Erdwiderstand hingegen positiv einzuführen.

Die gesuchte Spannungsfunktion ergibt sich dann aus der zweiten Gl. (8) durch Einsetzen des Wertes $\sigma_{\varphi 0}$ aus der zweiten Gl. (9) zu

$$f_0(\varphi) = \frac{\gamma}{6} \cdot (\lambda_0 - 1) \cos^3 \varphi. \quad (10)$$

4. Erddruck und Erdwiderstand bei beliebiger Wandreibung.

Der Rankinesche Spannungszustand ist bei lotrechter Stützfläche und waagrechter Bodenoberfläche nur dann möglich, wenn die Stützfläche vollkommen glatt ist. Die stets vorhandene Wandreibung führt, wie bereits angedeutet wurde, eine Störung herbei, die von der Wand ausgehend, in ihrer Wirkung abnehmen und in einiger Entfernung davon soweit abgeklungen sein wird, daß dort der ungestörte Rankinesche Spannungszustand herrscht. Diese Erscheinung ist durch Versuche hinreichend bestätigt; insbesondere wird auf die Arbeiten von Franzius und Streck² und auf die Ausführungen von Krey³ hingewiesen. Es besteht deshalb die Möglichkeit, den tatsächlich herrschenden Spannungszustand in zwei Anteile zu zerlegen und dem Rankineschen Spannungszustand eine Störung zu überlagern, wobei im Sinne der getroffenen Annahmen auch für den Störungszustand ein zentral-perspektiver Verlauf gelten soll. Die Spannungen für den Rankineschen Zustand seien mit σ_{r0} , $\sigma_{\varphi 0}$ und τ_0 und die des Störungszustandes mit σ_{r1} , $\sigma_{\varphi 1}$ und τ_1 bezeichnet. Dann ergeben sich die Gesamtspannungen durch Zusammensetzung wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r0} + \sigma_{r1}, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_{\varphi 0} + \sigma_{\varphi 1}, \\ \tau &= \tau_0 + \tau_1. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die zusätzlichen Spannungen σ_{r1} , $\sigma_{\varphi 1}$ und τ_1 stehen untereinander im Gleichgewicht, lassen sich deshalb gleichfalls durch eine Spannungsfunktion $f_1(\varphi)$ darstellen wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r1} &= \gamma r \cdot [f_1''(\varphi) + 3 f_1(\varphi)], \\ \sigma_{\varphi 1} &= \gamma r \cdot 6 f_1(\varphi), \\ \tau_1 &= \gamma r \cdot [-2 f_1'(\varphi)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

und es besteht die Aufgabe, diese Spannungsfunktion zu ermitteln.

Bisher wurden die Randbedingungen noch nicht erwähnt; sie verlangen, daß für

$$\varphi = 0, \quad \tau = \sigma_\varphi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

und für

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \sigma_r = \sigma_\varphi = \tau = 0$$

gilt. Die Spannungsfunktion kann so gewählt werden, daß die Randbedingungen für die Bodenoberfläche unter allen Umständen erfüllt sind. Dann verbleibt nur die

² Handbibliothek für Bauingenieure, herausgegeben von R. Otzen, III. Teil, 1. Band: Der Grundbau von O. Franzius, S. 26.

³ Krey-Ehrenberg: Erddruck, Erdwiderstand, 5. Aufl., S. 49ff. 1936.

Randbedingung für die Stützfläche bestehen. Sie lautet, wenn zur Bezeichnung der dort herrschenden Randspannungen lateinische Buchstaben verwendet werden,

$$t = s_{\varphi} \cdot \operatorname{tg} \delta, \quad (13)$$

Die Zustandsgleichung für den Rand $\varphi = 0$ ergibt sich in der Form

$$\Phi(0) = s_r^2 - 2 s_r s_{\varphi} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho) + s_{\varphi}^2 + 4 t^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho) = 0.$$

Setzt man in diese Gleichung die Randbedingung gemäß Gl. (13) ein und dividiert ferner durch s_{φ}^2 , so erhält man

$$\frac{s_r}{s_{\varphi}} = R = (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho) \pm 2 \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varrho) (\operatorname{tg}^2 \varrho - \operatorname{tg}^2 \delta)}$$

oder

$$s_r = R \cdot s_{\varphi}. \quad (14)$$

Die Größe R ist lediglich von der Ziffer des inneren Gleitwiderstandes und von der Ziffer der Wandreibung abhängig. Nachdem $\operatorname{tg} \delta$ nur in der zweiten Potenz vorkommt, ist die Größe R von der Richtung der Wandreibung unabhängig. R hat aber je nach dem Vorzeichen vor der Wurzel zwei Werte; das positive Vorzeichen gilt für den Erddruck, das negative für den Erdwiderstand.

Die erste Ableitung der Zustandsgleichung für den Rand $\varphi = 0$ liefert die Bedingung

$$\Phi'(0) = s_r \cdot s_r' - (s_r \cdot s_{\varphi}' + s_r' s_{\varphi}) (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho) + s_{\varphi} s_{\varphi}' + 4 t t' (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho) = 0.$$

Setzt man hierin für t und s_r die Werte gemäß Gl. (13) und (14) ein, so ergibt sich

$$s_r' [R - (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho)] + s_{\varphi}' [1 - R (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho)] + 4 t' \operatorname{tg} \delta (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho) = 0.$$

Führt man ferner die Hilfsgrößen

$$R_r' = R - (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho),$$

$$R_{\varphi}' = 1 - R (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho),$$

$$R_{\tau}' = 4 \operatorname{tg} \delta (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho)$$

ein, so vereinfacht sich die dritte Bedingungsgleichung wie folgt:

$$s_r' \cdot R_r' + s_{\varphi}' \cdot R_{\varphi}' + \tau' \cdot R_{\tau}' = 0. \quad (15)$$

Die zweite Ableitung der Zustandsgleichung lautet:

$$\begin{aligned} \Phi''(0) = & s_r s_r'' + s_r'^2 - (s_r \cdot s_{\varphi}'' + 2 s_r' s_{\varphi}' + s_r'' \cdot s_{\varphi}) (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho) + \\ & + s_{\varphi} \cdot s_{\varphi}'' + s_{\varphi}'^2 + 4 (t t'' + t'^2) (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho) = 0. \end{aligned}$$

Führt man für t und s_r wieder die Werte gemäß Gl. (13) und (14) ein, so gewinnt die vierte Bedingungsgleichung die Form

$$\begin{aligned} s_{\varphi} (s_r'' R_r' + s_{\varphi}'' R_{\varphi}' + t'' \cdot R_{\tau}') + s_r'^2 + s_{\varphi}'^2 - \\ - 2 s_r' s_{\varphi}' (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho) + 4 t'^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Nach diesen Vorbereitungen und mit Hilfe der Spannungen s_{r0} , $s_{\varphi0}$ und t_0 und ihrer Ableitungen können die gesamten Randspannungen und ihre Ableitungen für $\varphi = 0$ aus den beiden Anteilen zusammengesetzt werden, wobei die von der Wandreibung herrührenden zusätzlichen Spannungen durch die Funktion f_1 und ihre Ableitungen ausgedrückt erscheinen wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} s_r &= s_{r0} + s_{r1} = \gamma \cdot r (1 + f_1'' + 3 f_1), \\ s_{\varphi} &= s_{\varphi0} + s_{\varphi1} = \gamma \cdot r (\lambda_0 + 6 f_1), \\ t &= t_0 + t_1 = -2 \gamma \cdot r \cdot f_1'; \end{aligned} \right\} \quad (17a)$$

$$\left. \begin{aligned} s_r' &= s_{r0}' + s_{r1}' = \gamma \cdot r (f_1''' + 3 f_1'), \\ s_{\varphi}' &= s_{\varphi0}' + s_{\varphi1}' = \gamma \cdot r \cdot 6 f_1', \\ t' &= t_0' + t_1' = \gamma \cdot r (\lambda_0 - 1 - 2 f_1''); \end{aligned} \right\} \quad (17b)$$

$$\left. \begin{aligned} s_r'' &= s_{r0}'' + s_{r1}'' = \gamma \cdot r (2 \lambda_0 - 3 + f_1^{IV} + 3 f_1''), \\ s_\varphi'' &= s_{\varphi 0}'' + s_{\varphi 1}'' = \gamma \cdot r (2 - 3 \lambda_0 + 6 f_1''), \\ t'' &= t_0'' + t_1'' = \gamma \cdot r (-2 f_1''). \end{aligned} \right\} \quad (17c)$$

Hierin möge f_1 als Bezeichnung des Randwertes der Spannungsfunktion $f_1(\varphi)$ für den Rand $\varphi = 0$ gelten.

5. Lösung der Erddruckaufgabe in erster Annäherung.

Damit sind die Untersuchungen soweit gediehen, daß an die Einführung der Spannungsfunktion $f_1(\varphi)$ für die zusätzlichen Spannungen σ_{r1} , $\sigma_{\varphi 1}$ und τ_1 geschritten werden kann. Ihre Wahl erfolgt, wie bereits erwähnt wurde, derart, daß sie den Randbedingungen für die Bodenoberfläche von vorneherein entspricht, so daß also für diesen Rand alle Spannungen verschwinden. Für die Entwicklung der Spannungen von der Stützfläche weg stehen die Bedingungsgleichungen (13) bis (16) zur Verfügung. Vorstehend wurde beispielsweise die Entwicklung bis zur zweiten Ableitung von Φ durchgeführt. Die damit gewonnenen vier Gleichungen gestatten die Ermittlung von vier Freiwerten. Aber selbst diese vereinfachte Entwicklung führt zu einem verhältnismäßig großen Rechenaufwand.

Es wird deshalb in erster Annäherung nur von der Randbedingung (13) und von der Zustandsgleichung für den Rand $\varphi = 0$, Gl. (14), Gebrauch gemacht und der Spannungsfunktion folgende Form gegeben:

$$f_1(\varphi) = C_0 (1 - \sin \varphi)^n \cdot \cos^3 \varphi. \quad (18)$$

In diesem Ausdruck sind der Koeffizient C_0 und der Exponent n zu bestimmen.

Die Ableitungen der gewählten Spannungsfunktion lauten:

$$\begin{aligned} f_1'(\varphi) &= -C_0 n (1 - \sin \varphi)^{n-1} \cdot \cos^4 \varphi - 3 C_0 (1 - \sin \varphi)^n \cdot \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi, \\ f_1''(\varphi) &= C_0 n (n-1) (1 - \sin \varphi)^{n-2} \cdot \cos^5 \varphi + 7 C_0 n (1 - \sin \varphi)^{n-1} \cdot \cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi - \\ &\quad - 3 C_0 (1 - \sin \varphi)^n \cdot (\cos^3 \varphi - 2 \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Sollen die Randbedingungen für die Bodenoberfläche erfüllt sein, dann müssen für diesen Rand die Spannungsfunktion selbst und ihre beiden ersten Ableitungen verschwinden. Dieser Bedingung ist Genüge getan, wenn sich für n ein positiver Wert ergibt.

Die Wahl der Spannungsfunktion $f_1(\varphi)$ gemäß Gl. (18) mag zu willkürlich erscheinen, als daß man ihr Vertrauen entgegenbringen könnte. Wenn aber vorweg festgestellt wird, daß diese Form der Funktion bei allen rechnerisch erfaßbaren Erddruckaufgaben, also bei wechselnder Neigung der ebenen Bodenoberfläche und der Stützwand, brauchbar bleibt und daß sich dabei immer reelle und positive Werte für n ergeben, so wird das Vertrauen in diese Spannungsfunktion wachsen. Im übrigen wird darauf hingewiesen, daß eine Verbesserung der mit ihrer Hilfe erzielten ersten Annäherung jederzeit dadurch möglich ist, daß man die Spannungsfunktion zu einer Funktionenreihe erweitert.

Um die Erddruckberechnung von Anfang an auf eine möglichst verlässliche Grundlage zu stellen, ist es also zweckmäßig, die Wahl der Spannungsfunktion für die Berechnung in erster Annäherung so zu treffen, daß außer der Randbedingung auch die Gleitbedingung wenigstens für den Rand $\varphi = 0$ erfüllt ist.

Um zu dieser ersten Annäherung zu gelangen, wird folgender Rechnungsgang eingeschlagen:

Aus den Randwerten der Spannungsfunktion und ihrer Ableitungen für $\varphi = 0$

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= C_0, \\ f_1' &= -C_0 n, \\ f_1'' &= C_0 n(n-1) - 3C_0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

folgen die Randspannungen durch Einsetzen der Werte gemäß Gl. (19) in die Gl. (17a):

$$\left. \begin{aligned} s_r &= \gamma \cdot r [1 + C_0 n(n-1)], \\ s_\varphi &= \gamma \cdot r (\lambda_0 + 6C_0), \\ t &= \gamma \cdot r \cdot 2C_0 n. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Die Bedingungsgleichung (13) liefert die Beziehung

$$2C_0 n = \lambda_0 \operatorname{tg} \delta + 6C_0 \operatorname{tg} \delta$$

und aus ihr folgt der Koeffizient C_0 zu

$$C_0 = \frac{\lambda_0 \operatorname{tg} \delta}{2n - 6 \operatorname{tg} \delta}. \quad (21)$$

Die Bedingungsgleichung (14) führt durch Einsetzen der Spannungen gemäß Gl. (20) zu dem Ergebnis

$$1 + C_0 n(n-1) = \lambda_0 R + 6C_0 R.$$

Setzt man in diese Gleichung den Wert für C_0 gemäß Gl. (21) ein, dann erhält man nach einigen Umformungen die folgende quadratische Gleichung für n :

$$n^2 - n \left[1 + 2 \cdot \frac{\lambda_0 R - 1}{\lambda_0 \operatorname{tg} \delta} \right] - \frac{6}{\lambda_0} = 0. \quad (22)$$

Liegt der Wert von n vor, dann ist damit auch der Wert C_0 bestimmt und die Erddruckziffer λ läßt sich aus der zweiten Gl. (20) errechnen wie folgt:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot \frac{n}{n - 3 \operatorname{tg} \delta}. \quad (23)$$

Hierbei ist das Vorzeichen von δ im Sinne der getroffenen Festsetzungen (Abb. 1) zu berücksichtigen.

Bezeichnet h die lotrechte Höhe der Stützwand, dann ist die Seitenkraft des Erddruckes senkrecht zur Stützfläche gleich

$$E_n = \lambda \cdot \gamma \cdot \frac{h^2}{2} \quad (24a)$$

und die in die Stützfläche fallende Seitenkraft ist

$$E_t = E_n \cdot \operatorname{tg} \delta = \lambda \cdot \gamma \cdot \frac{h^2}{2} \operatorname{tg} \delta. \quad (24b)$$

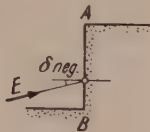
Das auf diesem Wege gewonnene Näherungsverfahren für die Berechnung des Erddruckes bzw. Erdwiderstandes soll nunmehr an einem Beispiel erprobt werden.

6. Beispiel für die Berechnung des Erddruckes und Erdwiderstandes in erster Annäherung.

In Anwendung des gefundenen Näherungsverfahrens wird der Erddruck auf eine lotrechte Stützfläche bei waagrechter Bodenoberfläche ermittelt. Die Ziffer des inneren Gleitwiderstandes sei hierbei mit $\operatorname{tg} \varrho = \operatorname{tg} (-30^\circ) = -0.577$ angenommen. Für wechselnde Werte der Wandreibung ergeben sich für den Erddruck die in nachstehender Tab. 1 zusammengefaßten Werte.

Außer den gemäß Gl. (23) in erster Annäherung gewonnenen Erddruckziffern erscheinen auch die entsprechenden Werte nach der Coulombschen Theorie, die dem Kreyschen Tabellenwerk entnommen sind. Nachdem aber dort die Erddruckziffern für den resultierenden Erddruck gelten, waren sie mit $\cos \delta$ zu multiplizieren.

Tabelle 1. Erddruck auf eine lotrechte Stützfläche ($\alpha = 0$) bei waagrechter Bodenoberfläche ($\beta = 0$); Gleitwinkel $\varrho = -30^\circ$.

Anordnung	δ	n gemäß Gl. 22	Erddruckziffer λ	
			gemäß Gl. 23	nach Coulomb
	-30°	7·897	0·273	0·254
	-25°	6·235	0·272	0·270
	-20°	5·764	0·280	0·282
	-15°	5·444	0·290	0·292
	-10°	5·190	0·303	0·304
	-5°	4·975	0·317	0·316
	0	—	0·333	0·333
	$+5^\circ$	4·577	0·354	0·352
	$+10^\circ$	4·384	0·379	0·374
	$+15^\circ$	4·174	0·413	0·400
	$+20^\circ$	3·934	0·462	0·443
	$+25^\circ$	3·576	0·548	0·594
	$+30^\circ$	2·803	0·852	0·867

Die Übereinstimmung ist im allgemeinen gut. Die geringfügigen Abweichungen sind um so größer, je weiter sich der tatsächliche Spannungszustand vom Rankine-schen Sonderfall entfernt, also für größere absolute Werte von δ .

Beim Erdwiderstand werden sich stärkere Abweichungen gegenüber den Coulomb-schen Werten ergeben. Als Beispiel wird der Erdwiderstand für eine lotrechte Stütz-fläche bei waagrechter Bodenoberfläche ermittelt, wobei die Ziffer des inneren Gleit-widerstandes $\operatorname{tg} \varrho = \operatorname{tg} (+30^\circ) = +0·577$ betragen soll.

Tabelle 2. Erdwiderstand einer lotrechten Druckfläche ($\alpha = 0$) bei waagrechter Bodenoberfläche ($\beta = 0$); Gleitwinkel $\varrho = +30^\circ$.

Anordnung	δ	n gemäß Gl. 22	Erdwiderstandsziffer λ	
			gemäß Gl. 23	nach Coloumb
Siehe Abbildung in Tabelle 1.	-30°	0·487	0·627	0·75
	-25°	0·862	1·144	1·24
	-20°	1·130	1·525	1·56
	-15°	1·347	1·879	1·86
	-10°	1·560	2·241	2·22
	-5°	1·770	2·627	2·60
	0	—	3·000	3·00
	$+5^\circ$	2·246	3·397	3·51
	$+10^\circ$	2·518	3·798	4·11
	$+15^\circ$	2·841	4·184	4·84
	$+20^\circ$	3·255	4·514	5·75
	$+25^\circ$	3·864	4·702	7·00
	$+30^\circ$	5·954	4·231	8·65

Die Rechnungsergebnisse sind überdies in der nachstehenden Abb. 4 zur Darstellung gebracht worden. Man erkennt, daß die gefundenen Werte von den Coulombschen Ziffern, insbesondere für große positive Werte von δ , die sich dem Winkel des inneren Gleitwiderstandes ϱ nähern, beträchtlich abweichen. Weil die hohen Werte, die aus der Coulombschen Theorie bei großer Wandreibung folgen, mit der Wirklichkeit nicht in Einklang gebracht werden können, ist anzunehmen, daß die gefundenen Erd-druckziffern besser entsprechen. In welchem Maße dies der Fall ist, soll erst nach Gewinnung genauerer Ergebnisse beurteilt werden.

Die Darstellung der Erddruckziffern in Abhängigkeit von der Wandreibung (Abb. 4) zeigt noch eine Besonderheit. Für positive Wandreibung, also für den gewöhnlichen Fall des Erdwiderstandes, bei dem die Wandreibung das Hochpressen des Bodenkeiles zu hemmen sucht, erreicht die Widerstandsziffer bei etwa $\delta = +25^\circ$ einen Größtwert und sinkt bei weiter wachsender Wandreibung wieder ab.

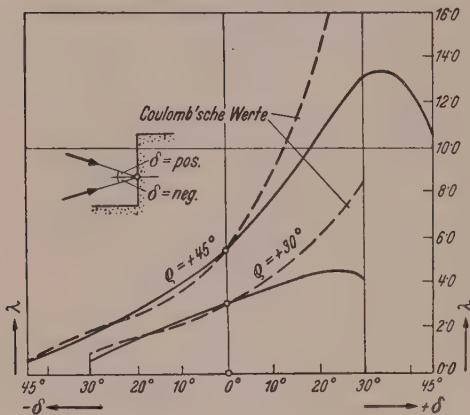


Abb. 4. Erddruckziffern bei lot-rechter Stützfläche und waagrechter Bodenoberfläche für $\rho = +30^\circ$ und $\rho = +45^\circ$.

Der Winkel des inneren Gleitwiderstandes $\rho = +30^\circ$ gilt für locker gelagerten Sand. Um festzustellen, ob die geschilderte Erscheinung auch bei größeren Werten des inneren Gleitwiderstandes zu beobachten ist, wurde die Berechnung auch für einen Winkel des inneren Gleitwiderstandes $\rho = +45^\circ$ durchgeführt.

Das Ergebnis wurde in die Abb. 4 eingetragen und es zeigt sich, daß die festgestellte Erscheinung für $\rho = +45^\circ$ noch ausgeprägter zu beobachten ist.

Zu ihrer Erklärung ist es notwendig, den Verlauf der Gleitflächen in Betracht zu ziehen, soweit dies unter Benützung des Mohrschen Spannungsbildes möglich ist (Abb. 5).

Nachdem beim Erdwiderstand die Ziffer des inneren Gleitwiderstandes positiv ist, müssen die Richtungen der Gleitflächentangenten am Stützwandfuß (Abb. 5)

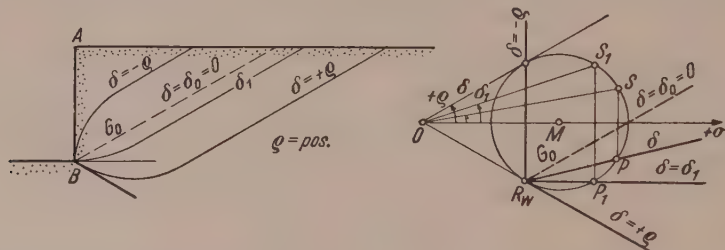


Abb. 5. Bestimmung der Gleitflächentangenten am Stützwandfuß und Darstellung der charakteristischen Gleitflächen für den Erdwiderstand bei lotrechter Stützwand und waagrechter Bodenoberfläche.

durch den Punkt R_w hindurchgehen. Für den Rankineschen Sonderfall ist die Gleitfläche durch den Strahl G_0 gegeben. Bei einem beliebigen positiven Wert von δ erhält man die Gleitflächenrichtung am Fuß der Stützfläche, indem man durch 0 unter der Neigung $+\delta$ den Strahl OS zieht. Der Punkt S ergibt dann die an der Stützwand herrschenden Randspannungen in ihrem gegenseitigen Verhältnis. Zieht man durch den Punkt S eine Parallele zur Stützfläche, also eine lotrechte Sehne, so erhält man als zweiten Schnittpunkt mit dem Kreis den Pol P . Die Verbindungslinie R_wP ergibt die Richtung der Gleitflächentangente. Für $\delta = +\rho$ fällt der Pol mit dem Punkt R_w zusammen und die Gleitflächenrichtung deckt sich mit der Tangente an den Spannungskreis im Punkt R_w .

Für $\delta = -\rho$ verläßt die Gleitfläche die Stützwand tangierend. Für einen aus dem Mohrschen Spannungskreis folgenden Winkel der Wandreibung $\delta = \delta_1$ verläuft die Gleitflächentangente am Rücken der Stützmauer waagrecht.

Wenn die Gleitfläche am Stützwandfuß bei einem Wandreibungswinkel $\delta > \delta_1$ eine erdwärts fallende Tangente besitzt, dann ist eine Entlastung des Gleitkeiles zu erwarten, weil eine Gewichtskomponente des auf dem erdwärts geneigten Teil der Gleitfläche auflastenden Bodens die Gleitbewegung unterstützt. Es ist also anzunehmen, daß der Erdwiderstand mit zunehmender Wandreibung zuerst stark wächst, solange die Gleitflächentangente an der Stützwand erdwärts ansteigt. Mit Überschreitung der waagrechten Tangente wird eine Abnahme des Anwachsens zu erwarten sein. Bei noch größerer Wandreibung kann dann vor Erreichung der Grenze $\delta = +\varrho$ ein Größtwert der Erdwiderstandsziffer auftreten.

7. Verbesserung der gewonnenen Ergebnisse.

Mit der Wahl der Spannungsfunktion gemäß Gl. (18) sind die Spannungen σ_r , σ_φ und τ im gesamten Bodenbereich bestimmt. Es liegt in der Willkür bei der Festlegung der Spannungsfunktion begründet, daß diese Spannungen nur in erster Annäherung zutreffend sein können und im allgemeinen einer Berichtigung bedürfen. Die Berichtigungswerte mögen mit $\Delta\sigma_r$, $\Delta\sigma_\varphi$ und $\Delta\tau$ bezeichnet werden. Sie seien verhältnismäßig klein gegenüber den Spannungswerten σ_r , σ_φ und τ , so daß in der Zustandsgleichung (2) ihre Quadrate vernachlässigt werden können.

Die Zustandsgleichung läßt sich nach Weglassung der zweiten Potenzen der Spannungsdifferenzen in der Form schreiben:

$$2 \cdot \Delta\sigma_r [\sigma_r - \sigma_\varphi (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho)] + 2 \cdot \Delta\sigma_\varphi [\sigma_\varphi - \sigma_r (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho)] + \\ + 8 \cdot \Delta\tau \cdot \tau (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho) + \sigma_r^2 - 2 \sigma_r \sigma_\varphi (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho) + \sigma_\varphi^2 + 4 \tau^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho) = 0$$

oder nach Einführung der Hilfsfunktionen

$$\Phi_1 = 2 [\sigma_r - \sigma_\varphi (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho)],$$

$$\Phi_2 = 2 [\sigma_\varphi - \sigma_r (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho)],$$

$$\Phi_3 = 8 \tau (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho),$$

$$\Phi_4 = \sigma_r^2 - 2 \sigma_r \sigma_\varphi (1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varrho) + \sigma_\varphi^2 + 4 \tau^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varrho) = 0$$

wie folgt darstellen:

$$\Psi(\varphi) = \Delta\sigma_r \cdot \Phi_1 + \Delta\sigma_\varphi \cdot \Phi_2 + \Delta\tau \cdot \Phi_3 = 0. \quad (25)$$

Vor der weiteren Behandlung der Zustandsgleichung für die Spannungsdifferenzen soll die Randbedingung für $\varphi = 0$ eingeführt werden. Sie lautet:

$$t + \Delta t = (s_\varphi + \Delta s_\varphi) \operatorname{tg} \delta; \quad (26)$$

weil aber

$$t = s_\varphi \cdot \operatorname{tg} \delta$$

ist, verbleibt

$$\Delta t = \Delta s_\varphi \cdot \operatorname{tg} \delta. \quad (27)$$

Wenn man nunmehr in die Zustandsgleichung (25) die für den Rand $\varphi = 0$ geltenden Spannungen einsetzt, dann erhält die erste Bedingungsgleichung die Form

$$\Psi_{(0)} = \Delta s_r \cdot F_1 + \Delta s_\varphi \cdot F_2 + \Delta t \cdot F_3 = 0, \quad (28)$$

wobei an Stelle von Φ_1 , Φ_2 und Φ_3 die zugehörigen Randwerte F_1 , F_2 und F_3 getreten sind.

Die erste Ableitung der Zustandsgleichung führt für den Rand $\varphi = 0$ zur zweiten Bedingungsgleichung:

$$\Psi'_{(0)} = \Delta s'_r \cdot F_1 + \Delta s_r \cdot F'_1 + \\ + \Delta s'_\varphi \cdot F_2 + \Delta s_\varphi \cdot F'_2 + \\ + \Delta t' \cdot F_3 + \Delta t \cdot F'_3 + F'_4 = 0. \quad (29)$$

Die zweite Ableitung der Zustandsgleichung erbringt die dritte Bedingungsgleichung:

$$\begin{aligned} \Psi''_{(0)} = & \Delta s_r'' \cdot F_1 + 2 \Delta s_r' \cdot F_1' + \Delta s_r \cdot F_1'' + \\ & + \Delta s_\varphi'' \cdot F_2 + 2 \Delta s_\varphi' \cdot F_2' + \Delta s_\varphi \cdot F_2'' + \\ & + \Delta t'' \cdot F_3 + 2 \Delta t' \cdot F_3' + \Delta t \cdot F_3'' + F_4'' = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Von der Anführung weiterer Ableitungen von $\Psi_{(\varphi)} = 0$ für $\varphi = 0$ wird Abstand genommen, weil ihr Bildungsgesetz schon in der zweiten Ableitung in Erscheinung tritt.

Die Werte F_1 , F_2 , F_3 und F_4 sowie ihre Ableitungen sind Funktionen der in erster Annäherung ermittelten Randspannungen. Die Spannungsdifferenzen Δs_r , Δs_φ und Δt müssen einem Gleichgewichtszustand entsprechen und können daher ebenfalls durch eine Spannungsfunktion $\Delta f_1(\varphi)$ dargestellt werden. Wenn n die Hochzahl der in erster Annäherung gewählten Spannungsfunktion ist, so kann die Differenzfunktion beispielsweise wie folgt angenommen werden:

$$\begin{aligned} \Delta f_1(\varphi) = & [C_1 (1 - \sin \varphi)^{n+1} + C_2 (1 - \sin \varphi)^{n+2} + C_3 (1 - \sin \varphi)^{n+3} + \\ & + C_4 (1 - \sin \varphi)^{n+4} + \dots] \cos^3 \varphi. \end{aligned} \quad (31)$$

Damit ist der Grundgedanke der schrittweisen Verbesserung dargelegt. Auf die Einzelheiten der Berechnung wird nicht näher eingegangen.

Die Erddruckziffer in der verbesserten Form ergibt sich schließlich zu

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 + \Delta \lambda_1 = \lambda_0 + 6 (f_1 + \Delta f_1). \quad (32)$$

Wenn auf diese Weise eine Verbesserung der im Abschnitt 6 angeführten, in erster Annäherung gewonnenen Ergebnisse für den Erdwiderstand durchgeführt wird, so erhält man die in der nachstehenden Tab. 3 zusammengefaßten Werte.

Tabelle 3. Verbesserte Ergebnisse für den Erdwiderstand einer lotrechten Druckfläche ($\alpha = 0$) bei waagrechter Bodenoberfläche ($\beta = 0$); Gleitwinkel $\varrho = + 30^\circ$.

δ	Erdwiderstandsziffern				
	in erster Annäherung	erste	zweite	dritte	nach Coulomb
		Verbesserung			
		λ_I	λ_{II}	λ_{III}	
0°	3·000	3·000	3·000	3·000	3·00
+ 5°	3·397	3·426	3·438	—	3·51
+ 10°	3·792	3·890	3·917	—	4·11
+ 15°	4·184	4·337	4·382	—	4·84
+ 20°	4·514	4·656	4·830	—	5·75
+ 25°	4·702	5·002	5·120	—	7·00
+ 30°	4·231	4·588	4·972	4·958	8·65

Die dritte Verbesserung, die nur für $\delta = + 30^\circ$ durchgeführt wurde, bringt eine nicht mehr wesentliche Verringerung des Wertes für den Erdwiderstand. Die in erster Annäherung gewonnenen Werte sind kleiner als die verbesserten Werte; wenn man die ersteren verwendet, bewegt sich also die Näherung auf der sicheren Seite.

Das Auftreten eines Größtwertes für die Erddrucksziffer wird durch die genaue Nachrechnung bestätigt, wobei diese Erscheinung nur eine geringfügige Milderung erfährt.

8. Schlußwort.

Die Berechnung des Erddruckes unter Berücksichtigung der Gleitflächenkrümmung bleibt, wie bereits eingangs erwähnt wurde, auf den einfachsten Fall der lotrechten Stützwand bei waagrechter Bodenoberfläche beschränkt. Eine grundsätzlich ähn-

liche Untersuchung der Fälle mit überhängender oder lehrender Stützfläche und geböschter Bodenoberfläche erlaubt es, sowohl für den Erddruck als auch für den Erdwiderstand festzustellen, wann die Coulombsche Theorie versagt und die Unstimmigkeiten so groß sind, daß sie bei der praktischen Berechnung von Stützmauern berücksichtigt werden sollen.

(Eingegangen am 2. Jänner 1947.)

Persönliches.

Professor St. Timoshenko zum 70. Geburtstage.

Stepan Prokofievitch Timoshenko wurde am 22. Dezember 1878 in Shpotovka bei Kiew in Rußland geboren. Er studierte die Ingenieurwissenschaften am Wegebauinstitut von St. Petersburg. Nach Beendigung seiner Studien (1901) war er zuerst an dieser Anstalt, später, bis 1906, am Polytechnischen Institut von St. Petersburg als Instruktor tätig. Während dieser Zeit bereiste er auch Deutschland und verbrachte je ein Semester bei A. Föppl in München und bei L. Prandtl in Göttingen. Im Jahre 1906 wurde er Professor für angewandte Mathematik in Kiew, 1913 kehrte er als Professor für Festigkeitslehre und Elastizitätstheorie an das Wegebauinstitut in St. Petersburg zurück und hatte dann 1914 bis 1918 die Stelle eines Ordinarius an der neugeschaffenen Lehrkanzel für Elastizitätstheorie des Schiffbaues am Polytechnischen Institut in St. Petersburg inne. Während des ersten Weltkrieges war er Berater der Marine, der Eisenbahnen sowie der Luftfahrt Rußlands.

Nach dem Kriege verbrachte er zwei Jahre in Kiew und war dann 1920 bis 1922 Professor der angewandten Mechanik in Zagreb in Jugoslawien. Einer Einladung der Vibration Speciality Comp. in Philadelphia folgend, ging er 1922 als beratender Ingenieur dieser Gesellschaft nach den USA. und wurde ein Jahr später Mitglied der Forschungsgruppe der Westinghouse Comp. in Pittsburgh. Neun Jahre lang wirkte er sodann als Professor der Ingenieurmechanik an der Universität Michigan. Im Jahre 1936 übernahm er schließlich das Ordinariat für theoretische und angewandte Mechanik an der Universität Stanford in Kalifornien. Drei Jahre später zog er sich von der akademischen Lehrtätigkeit zurück. Zeitweise wirkt er noch immer als Gastprofessor.

Professor Timoshenko hat bisher 15 Bücher geschrieben, er hat auch die Abschnitte „Festigkeitsprobleme im Maschinenbau“ und „Stabilitätsprobleme der Elastizität“ im Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik von Auerbach-Hort (1928) und den Abschnitt „Vibration Problems“ in Marks Mechanical Engineering Handbook (1930) bearbeitet; ferner hat er gegen 80 technisch-wissenschaftliche Abhandlungen verfaßt.

Seine ersten fünf Bücher sind in russischer Sprache geschrieben: eine Festigkeitslehre (1911), die später auch in polnischer Sprache erschienen ist, eine Sammlung von Festigkeitsproblemen (1907), zwei Bände Elastizitätstheorie (1914 bzw. 1916) und eine Baustatik (1922).

Die weiteren Bücher sind in englischer Sprache verfaßt worden: Applied Elasticity, zusammen mit J. M. Lessels (1923) (auch in deutscher und russischer Sprache), Vibration Problems in Engineering (1928) (auch in deutscher und russischer Sprache), zwei Bände Strength of Materials (1930) (auch in russischer Sprache), Theory of Elasticity (1934) (auch in französischer Sprache), Elements of Strength of Materials, zusammen mit G. H. Mac Cullough (1935), Theory of Elastic Stability (1936), zwei Bände Engineering Mechanics, zusammen mit D. H. Young (1937) und Theory of Plates and Shells (1940).

Seine Bücher, bei deren Abfassung er sich mehr und mehr auf eigene Arbeiten stützen konnte, sind mit vorbildlicher Klarheit geschrieben; sie stellen wahre Standardwerke der Ingenieurwissenschaften dar. Mit peinlicher Sorgfalt sind in diesen Büchern auch alle Quellen verzeichnet, so daß sie zugleich eine umfassende Übersicht über die einschlägige Fachliteratur bieten.

Von seinen vielen wissenschaftlichen Abhandlungen, welche Aufgaben des Maschinenbaues, des Schiffbaues, des Bauwesens und des Flugzeugbaues behandeln, sind 23 in russischer Sprache, die übrigen in englischer, französischer oder deutscher Sprache veröffentlicht worden. Zumeist werden Fragen der Festigkeitslehre bearbeitet und es gibt wohl kaum ein Gebiet dieses Wissenszweiges, auf welchem Professor Timoshenko nicht mit eigenen Arbeiten hervorgetreten wäre. Verschiedene wichtige Probleme sind erst durch ihn aufgegriffen und von ihm, bzw. nach den von ihm entwickelten Verfahren gelöst worden.

Grundlegende Erkenntnisse verdanken wir Professor Timoshenko vor allem auf dem Gebiete der Stabilitätstheorie. Schon in seiner Habilitationsschrift vom Jahre 1907 hat er die Lösung

für die Kippung eines Stabes mit doppelsymmetrischem I-Querschnitt angegeben, die auch in seiner berühmt gewordenen Abhandlung in der Zeitschrift für Math. Physik 1910 zu finden ist. Diese Abhandlung enthält auch bereits die Ermittlung der kritischen Last eines axial gedrückten, achsensymmetrisch beulenden Rohres. Auch die schon 1907 aufgefundenen, überaus wichtigen Lösungen für die Beullast von gleichmäßig gedrückten, verschiedenen Lagerungsbedingungen unterworfenen Rechteckplatten (einige dieser Aufgaben wurden, von ihm unabhängig, von H. Reißner gelöst und 1909 im Zentralblatt der Bauverwaltung veröffentlicht) sind in dieser Abhandlung enthalten.

Professor Timoshenko hat sich bei der Lösung von Spannungs- und von Stabilitätsproblemen häufig und mit großem Geschick der energetischen Methode bedient, die er u. a. auch in einer sehr bekannt gewordenen Abhandlung in den Annales des Ponts et Chaussées vom Jahre 1913 dargelegt hat. Mit Hilfe dieses Verfahrens konnte er brauchbare Näherungslösungen vor allem in jenen Fällen entwickeln, in welchen an eine strenge Lösung der Aufgaben durch Integration der bezüglichen Differentialgleichung nicht zu denken ist. In der genannten Abhandlung hat er u. a. die Beullast der umfanggelagerten Rechteckplatte für Druck und Biegung sowie für reinen Schub angegeben. In seiner nicht minder bekannten Abhandlung im Eisenbau 1921 hat er Näherungslösungen für die Beullast versteifter Platten entwickelt, ein Problem von ganz besonderer praktischer Bedeutung, über dessen Behandlung er bereits 1915 in russischer Sprache berichtet hat.

Auch mit Schwingungsproblemen hat sich Professor Timoshenko sehr eingehend in Büchern und Abhandlungen befaßt. Wiederholt hat er ferner die stoßweise Belastung von Baugliedern, die Spannungshäufungen an Kerben und Übergängen sowie das Problem Schiene und Rad behandelt. Im Zusammenhange mit der Ermittlung der Kipplast von I-Trägern ist ihm erstmalig auch die Lösung eines Problems der Wölbkrafttorsion gelungen. Neben den verschiedensten Festigkeitsaufgaben werden in seinen Abhandlungen auch Aufgaben der Baustatik, zum Teil unter Anwendung des energetischen Verfahrens (Trägerrost), bearbeitet. Wiederholt hat er sich mit der Verformungstheorie verankerter Hängebrücken befaßt und erst im Jahre 1943 wieder eine umfangreichere Abhandlung über dieselbe veröffentlicht. Eine umfassende Darstellung der vor allem für den Flugzeugbau wichtigen Theorie des dünnwandigen Stabes mit offenem Querschnitt (Querkraftbiegung, Torsion, Drillknicken) ist 1945 erschienen.

Durch seine Lehrtätigkeit, seine vielen Veröffentlichungen und durch seine Mitarbeit in verschiedenen technisch-wissenschaftlichen Vereinigungen der USA. hat er das Forschungswesen in Nordamerika entscheidend beeinflußt. Als Organisator wie als aktives Mitglied hat er sich um die Internationalen Kongresse für angewandte Mechanik bedeutende Verdienste erworben. Ferner sei sein erfolgreiches Bemühen um die Begründung der Zeitschrift „Applied Mechanics“ rühmlichst hervorgehoben.

Professor Timoshenko, der sich allorts größter Wertschätzung erfreut, sind bereits zahlreiche Ehrungen erwiesen worden. Er ist auch Ehrendoktor amerikanischer Universitäten, und im Vorjahre ist ihm die Internationale James-Watt-Medaille verliehen worden.

Wir beglückwünschen Professor Timoshenko zu seinem 70. Geburtstage und danken ihm für all das Wertvolle, Interessante und Schöne, das er uns in seinen Werken geschenkt hat und für die vielen Anregungen, die wir von ihm empfangen haben. Mögen ihm noch viele Jahre frohen Schaffens beschieden sein!

K. Girkmann.

Buchbesprechungen.

Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten, Schalen und Faltwerke. Von K. Girkmann. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 272 Textabb., XVI, 502 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. In Österreich: S 132.—, geb. S 138.—. Im Ausland: sfr 66.—, geb. sfr 70.—.

Das vor zwei Jahren erschienene Werk Girkmanns liegt nun in zweiter Auflage vor. Diesen Erfolg verdankt es nicht nur dem Umstande, daß die einschlägigen Werke von A. Nádá y und W. Flü gge (Elastische Platten 1928, Statik und Dynamik der Schalen 1934), in denen gewisse Teile des zu referierenden Buches vor vielen Jahren ihre zusammenfassende Darstellung gefunden haben, schon längst vergriffen sind, sondern vor allem seiner besonderen Eigenart. Die einheitliche und sehr verständliche exakte Behandlung des großen und nicht leichten Gebietes der Elastostatik der Flächentragwerke, verbunden mit geschickter Stoffauswahl und eingehenden verläßlichen Schrifttumsangaben bei Berücksichtigung des neuesten Standes dieses Forschungsgebietes, sind Vorzüge, die der Referent bereits in der ausführlichen Besprechung der ersten Auflage (Österreichische Bauzeitschrift 1947, S. 25) besonders hervorheben konnte. Die zweite Auflage, die im Aufbau des Buchinhaltes mit der ersten Auflage im wesentlichen übereinstimmt, bot dem Verfasser Gelegenheit zur Ausmerzung von Schreib- und Druckfehlern und zur Ergänzung

des Schrifttumsverzeichnis durch Aufnahme der ihm mittlerweile bekannt gewordenen ausländischen Arbeiten.

Eine willkommene Bereicherung erhielt das Werk durch die Hinzufügung eines neuen Abschnittes über die orthotropen Platten.

Wer sich mit Fragen der Elastostatik der Flächentragwerke zu befassen hat, sei es als Studierender oder als ausübender Ingenieur im Stahl- und Stahlbetonbau, wird dieses vortreffliche Buch als verlässlichen Ratgeber mit großem Gewinn gebrauchen können; dem Forscher aber steht hiemit ein mustergültiges Nachschlagwerk zur Verfügung.

K. Federhofer, Graz.

Verbrennungsmotorenlehrbilder aus H. List, Die Verbrennungskraftmaschine. Gesammelt von L. Richter. Mit 153 Textabb., IV, 120 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. In Österreich: S 28.—. Im Ausland: sfr 14.—.

Die Verbrennungsmotorenlehrbilder stellen eine systematische Zusammenstellung der in den Bänden 5, 11 und 12 der Reihe „Die Verbrennungskraftmaschine“ dargestellten und dort behandelten Verbrennungsmotoren dar. Außer der Angabe der Herstellerfirma, der Bezeichnung der Arbeitsweise des Motors, seiner wichtigsten Kenndaten, eines kurzen Hinweises auf die Stelle, an welcher er in dem oben angeführten Sammelwerk zu finden ist und einer Benennung verschiedener konstruktiver Einzelheiten bei einzelnen Darstellungen, enthält das Buch — abgesehen vom Verzeichnis, einigen einleitenden Hinweisen und der Erläuterung der Abkürzungen — keinen Text.

Die Reihenfolge der Abbildungen läßt eine Einteilung nach dem Arbeitsverfahren und dem Brennstoff erkennen, wobei in den einzelnen Gruppen Beispiele von Motoren der nachstehend angeführten Größenordnungen und Bauarten bzw. für die aufgezählten Verwendungszwecke zu finden sind.

1. Motoren mit Fremdzündung: Benzinmotoren — Viertakt-Kraftfahrzeugmotoren.

Gasmotoren — Zweitakt- und Viertakt-Groß- und Mittelmotoren stehender und liegender Bauart.

2. Motoren mit Verdichtungszündung: Dieselmotoren — Zweitakt-Dieselmotoren — Raschlaufende Motoren für Triebwagen, Mittelmotoren und Großmotoren für Stationär- und Schiffsantriebe — Viertakt-Dieselmotoren: Raschlaufende Motoren für Kraftfahrzeuge, Triebwagen und Bootsantriebe, Mittelmotoren für Stationär-, Lokomotiv- und Schiffsantriebe und Großmotoren für Stationär- und Schiffsantriebe.

Gasmotoren.

Als Beispiel ist ein Zweitaktgasmotor, der nach dem Dieselgasverfahren arbeitet, angeführt. Der zweite angeführte Zweitaktgasmotor würde besser zu den Gasmotoren mit Fremdzündung passen, da er elektrische Zündung aufweist und der Einblasedruck bzw. Zeitpunkt kein Kriterium für das Arbeitsverfahren ist.

Die Zusammenstellung, die als Ersatz für die vergriffenen „Konstruktionen aus dem Öl- und Gasmaschinenbau“ gedacht ist, gibt einen guten Überblick über die Konstruktionsmerkmale des deutschen Dieselmotorenbaues bis etwa 1942, der noch ergänzt wird durch Beispiele verschiedener, vor allem kontinentaler Dieselmotoren. Ein weniger abgerundetes Bild bietet die Zusammenstellung der Kraftfahrzeugbenzinmotoren, denn nur solche sind in der Sammlung enthalten. Die Herausgabe einer Sammlung von Kraftrad- und Flugmotorenbildern nach Erscheinen der entsprechenden Bände des Sammelwerkes „Die Verbrennungskraftmaschine“ ist in Aussicht gestellt.

Es ist anzunehmen, daß die Lehrbilder mit Herausgabe der angekündigten Neuauflagen verschiedener Bände dieses Sammelwerkes eine Erweiterung erfahren werden. In diesem Zusammenhange sei angeregt, das Buch im Zuge späterer Neuauflagen zu einer Sammlung der wichtigsten heute gebauten und in der Fachliteratur veröffentlichten Kolbenverbrennungsmotoren auszubauen. Eine solche Zusammenstellung, die bis heute weder im Inland noch im Ausland vorhanden ist, würde zweifellos allgemein Beachtung finden.

P. Hold, Steyr.

The Philosophical Magazine: Natural Philosophy through the Eighteenth Century and Allied Topics. Herausgegeben von A. Ferguson, VII, 164 S. London: Taylor & Francis, Ltd. 1948.

Aus Anlaß seines 150jährigen Bestandes hat das Philosophical Magazine eine Sondernummer herausgebracht, in der die Entwicklung der exakten Wissenschaften und auch ihrer technischen Anwendungen im Laufe des 18. Jahrhunderts in chronologischer Folge dargestellt, aber auch kritisch beleuchtet wird. Es behandelt im einzelnen: Sir H. Spencer-Jones die Astronomie; H. Dingle die Physik; J. R. Partington die Chemie; J. F. Scott die Mathematik; E. C. Smith Erfindung und Ingenieurwesen; R. S. Whipple die wissenschaftlichen Instrumente; D. McKie die wissenschaftlichen Gesellschaften und Periodica; F. Sherwood Taylor den wissenschaftlichen Unterricht.

Diese Abhandlungen bieten interessante Einzelheiten und Gegenüberstellungen, wie z. B. die Entstehungsgeschichte der verschiedenen Thermometerskalen; die Ereignisse in England sind allerdings viel ausführlicher erwähnt als die in der übrigen Welt. *L. Kirste, Wien.*

Theoretical Structural Metallurgy. Von *A. H. Cottrell.* Mit 96 Textabb., VIII, 256 S. London: E. Arnold & Co. 1948. 21 s.

Zum Unterschied von anderen Gebieten der Naturwissenschaften, deren Grundlagen geklärt waren, bevor sie in die Technik Eingang fanden und wo die Praxis von vornherein auf fest fundierten theoretischen Grundlagen fußen konnte (z. B. Radiotechnik), war die Metallurgie durch Jahrtausende auf Erkenntnisse aufgebaut, die rein aus der Praxis gewonnen wurden. Unter diesem Gesichtspunkt ist es verwunderlich, welch hohen Grad von Güte die Metallerzeugnisse des Altertums bereits erreichen konnten. In der Metallurgie war daher die Tätigkeit des Wissenschaftlers die längste Zeit hindurch darauf gerichtet, die bereits durch die Praxis festliegenden Verfahren zu untersuchen und theoretisch zu fundieren. Erst allmählich ist es gelungen, auch der Metallurgie eine wissenschaftlich fest fundierte Grundlage zu geben und Verfahren unter Benützung dieser Grundlagen auszuarbeiten.

Es ist bekannt, daß in der theoretischen Metallkunde in erster Linie die Wellenmechanik und die statistische Thermodynamik die Grundlagen geliefert haben, die phänomenologischen Erkenntnisse früherer Zeiten wissenschaftlich zu verwerten. Der theoretische Metallkundler ist nach dem modernen Stand dieser Wissenschaft im Grunde genommen physikalischer Chemiker. Bekanntlich erfordern aber die Methoden der physikalischen Chemie eingehende Kenntnisse aus den Gebieten der Mathematik und der theoretischen Physik, zu deren Erwerb dem Metallurgen im allgemeinen Zeit und Gelegenheit fehlen. Das vorliegende Buch wurde nun von einem Metallurgen, der sich der Mühe des Studiums der Grundlagen der theoretischen physikalischen Chemie unterzogen hat, für Metallurgen und Metallurgiestudenten geschrieben. Dieser Tendenz des Autors entsprechend sind in dem Buch schwierige mathematische Abhandlungen vermieden und die Ergebnisse der theoretischen Forschung in leichtverständlicher Weise zusammengestellt.

Da eine moderne Metallkunde ohne Benützung der Ergebnisse der Röntgenstrukturanalyse undenkbar ist, erfährt auch die Röntgenfeinstrukturanalyse in dem vorliegenden Buch eine kurze Besprechung. Angaben über die experimentelle Durchführung solcher Untersuchungen werden in dem Buche jedoch grundsätzlich nicht gemacht. Da das Buch als Einführung für Metallurgiestudenten gedacht ist, sind die notwendigen Grundlagen in dem Buch an geeigneter Stelle selbst beschrieben. Der Natur der Darstellung entsprechend wollen diese Hinweise natürlich in keiner Weise Anspruch auf Vollständigkeit erheben.

Das Buch beschränkt sich in erster Linie auf die Elektronentheorie der Metalle und auf die statistische Thermodynamik der Metalle und Legierungen, da diese Gebiete heute durch die physikalische Chemie als weitgehend geklärt betrachtet werden können. Hingegen sind die in technologischen Lehrbüchern ohnedies zur Genüge behandelten Probleme der Festigkeitseigenschaften sowie der Rekristallisationseigenschaften der Metalle und Legierungen theoretisch noch weitgehend ungeklärt, so daß es dem Autor nicht zweckmäßig erschien, diese letztgenannten Eigenschaften in sein Lehrbuch aufzunehmen. Die Beschränkung auf die Behandlung genügend geklärter Probleme gereicht dem Buch durchaus zum Vorteil, da der Studierende davon abgehalten wird, zu einer nicht fundierten, bloß spekulativen Metallkunde hingedrängt zu werden. Das gut ausgestattete Buch wird jedoch nicht nur von den Metallurgen, sondern auch von den Physikern, Chemikern und verwandten Wissenschaftlern, die mit Metallen zu tun haben, ohne jedoch die Metallkunde als eigentliches Forschungsgebiet zu betreiben, dankbarst begrüßt und mit Erfolg verwendet werden. *F. Regler, Wien.*

Fourier Technique in X-Ray Organic Structure Analysis. Von *A. D. Booth* (The Cambridge Series of Physical Chemistry. Herausgegeben von *E. K. Rideal*.) Mit Abb., X, 106 S. Cambridge: A the University Press. 1948. 12 s 6 d.

Nach der so erfolgreichen Strukturbestimmung von einfachen Kristallgittern mittels Röntgenstrahlen wurde die Kristallstrukturanalyse auf immer kompliziertere Gitter ausgedehnt, bei denen die vollständige und genaue Festlegung der Gitterparameter einen wesentlich größeren und schwierigeren mathematischen Aufwand erfordert als bei den einfachen Gittertypen. Dem entsprechend erweist es sich auch als zweckmäßig, in Lehrbüchern die elementaren Grundlagen der Röntgenphysik und der Kristallographie getrennt von denen der vollständigen Kristallstrukturanalyse zu behandeln. Dieser Gesichtspunkt war auch bei der Abfassung des vorliegenden Werkes maßgebend, das sich ausschließlich mit dem speziellen Teil der Kristallgitterbeschreibung aus Röntgeninterferenzen beschäftigt und die Grundlagen als bekannt voraussetzt. Das Buch wendet sich daher mit Absicht an den röntgenographisch und kristallographisch vorgebildeten Leser. Nach Beschreibung der bekannten *Fourier*- und *Patterson*-Analyse will das Buch den Fortschritt aufzeigen, den die Röntgenstrukturanalyse durch Verwendung maschineller Aus-

wertungsverfahren gegenüber den früher so langwierigen und zeitraubenden Rechnungsmethoden erfahren hat. Der Autor weist darauf hin, daß die maschinelle Auswertungstechnik der Röntgen-diagramme immer weiter fortschreitet und daß insbesondere in einer etwa notwendig werdenden Neuauflage seines Buches diesen Methoden ein noch viel breiterer Raum gewidmet werden wird. Da jedem mit der Kristallstrukturanalyse befaßten Forscher die Schwierigkeiten bei der Auswertung der Diagramme genügend bekannt sind, ist das Erscheinen eines modernen, die neuzeitlichen Auswertungsverfahren übersichtlich beschreibenden Buches wärmstens zu begrüßen. Das gut ausgestattete Buch wird jedem auf diesem Gebiet arbeitenden Kristallographen, Physiker und physikalischen Chemiker als wertvoller Arbeitsbehelf äußerst willkommen sein. *F. Regler, Wien.*

Massivbrücken. Von *J. Fritsche* †. (Der Brückenbau. Herausgegeben von *E. Melan*. 2. Band.) Mit 602 Textabb., 39 Tab., XI, 693 S. Wien: F. Deuticke. 1948. Geb. S 120.—.

Die erfrischend klare und durch sprachliche Ausgefeiltheit leicht verständliche Darstellung des umfangreichen Stoffes führt den Leser leicht über die vielen Schwierigkeiten hinweg, die das Fachgebiet des Massivbrückenbaues bietet. Die theoretischen Betrachtungen berücksichtigen die letzten wissenschaftlichen Erkenntnisse in der Bewältigung der bei der Berechnung von Massivbrücken auftretenden statischen Probleme und Festigkeitsberechnungen. Zahlreiche Abbildungen von Brückenkonstruktionen verschiedenster Systeme, ausführliche Zeichnungen von Konstruktionseinzelheiten mit dazugehörigen erläuternden Beschreibungen, sowie die Hinweise auf weiteres Schrifttum machen das Buch zu einem wertvollen Nachschlagewerk, das Studierende ebenso gerne zur Hand nehmen werden wie die in der Praxis stehenden Ingenieure.

Nach einer kurzen Darstellung der geschichtlichen Entwicklung des Massivbrückenbaues wird im ersten Kapitel das Wissenswerte über die Baustoffe der Massivbrücken behandelt und eine, vielleicht zu kurze, Theorie des Stahlbetonbaues entwickelt.

Das zweite Kapitel befaßt sich mit der Theorie des Bogenträgers und bringt Berechnungsmethoden für alle im Brückenbau vorkommenden Bogenformen, angefangen vom Dreigelenkbogen bis zu zusammenhängenden Bogentragwerken über mehrere Öffnungen.

Im dritten Kapitel werden Stahlbetonbrücken mit platten- und balkenförmigen Tragwerken in allen Erscheinungsformen vom statisch bestimmt gelagerten Balken, über den Balken auf mehreren Stützen bis zu Rahmentragwerken in ihrer konstruktiven Durchbildung dargestellt. Auch Balkenbrücken mit vorgespannten Stahleinlagen sowie Spannbetonbrücken werden ausführliche Betrachtungen gewidmet. Für die ebenen Spannungszustände, die in Fahrbahnplatten, seien sie Plattenstreifen oder allseitig aufliegende Platten, unter Einzellasten entstehen, werden Berechnungswege aufgezeigt.

Den breitesten Raum nehmen die Darlegungen des vierten Kapitels über die gewölbten und bogenförmigen Tragwerke aus Stein, Beton und Stahlbeton ein. Zur Formung des Bogens nach der Stützlinie werden, nach Vereinfachungen, die die Gleichung der Stützlinie integrierbar machen, strengere und auch einfachere Lösungen gebracht, aber auch das Verfahren von *Straßner* dargestellt. Die Vorbemessung der wichtigsten Bogenquerschnitte wird sowohl für den Bogen aus Stein- oder Betonmauerwerk, als auch für den schlaff- und steifbewehrten Stahlbetonbogen ausführlich behandelt. Der Verfasser ist bemüht, die durch die Verkehrslasten und Bogenverkürzungen entstehenden Wirkungen, die das Abweichen der Stützlinsen von der für Eigengewicht stützliniengerechter Bogenachse verursachen, möglichst genau zu erfassen und gelangt daher zu gut brauchbaren Bogenabmessungen, die der genauen statischen Untersuchung und der Spannungsberechnung zugrunde gelegt werden können.

In den anschließenden Abschnitten werden mögliche Störungen der Stützlinsen, als deren Folge Rißbildungen auftreten würden, und geeignete Wölbfverfahren zur Verhütung solcher Störungen ausführlich beschrieben. Diese Wölbfverfahren sind in ausführlichen Zeichnungen von erfolgreich durchgeführten Bauausführungen leichtverständlich dargestellt. Auch das Wölfspreizverfahren von *Färber* und *Freyssinet* für das Ausrüsten und zur Verbesserung der Verteilung der Eigengewichtsspannungen findet seine Darstellung.

Berechnung und konstruktive Durchbildung von Brückengelenken, Widerlagern mit Flügelmauern und Brückenpfeilern, die Lagerung der Fahrbahn auf dem Brückenbogen wird in ausführlichen Darstellungen und zahlreichen Bildern von ausgeführten Bauten gebracht. Sonderausführungen wie die Längsteilung von Brückengewölben, Viadukte, voll überschüttete gewölbte Durchlässe und schiefe Brücken, ebenso Wölfbbrücken mit schlaffen und steifen Stahleinlagen, Bogen aus umschnürtem Gußeisenbeton, Bogenbrücken mit aufgehängter Fahrbahn, der *Maillart*-sche versteifte Stabbogen, werden dem Leser durch Beschreibung und zahlreiche Bebilderung vorgeführt.

Das fünfte Kapitel befaßt sich mit baulichen Einzelheiten der Fahrbahndecken, Fahrbahn- und Widerlagerisolierungen, der Abfuhr von Tag- und Sickerwässern, der Gestaltung von Brückenaufbauten, wie Geländer usw. und der architektonischen Ausschmückung von Massivbrücken.

Eine ausführliche Darstellung finden Berechnung und Gestaltung von Lehrgerüsten, Ausrüstvorrichtungen und Ausrüstvorgang, dabei wird auch die Frage der Überhöhung der Lehrgerüste behandelt.

Die Fachwelt dankt dem Herausgeber, der, nach dem frühen Ableben des Verfassers, keine Mühe gescheut hat, das wertvolle Buch herauszubringen, zu dem er selbst im Nachtrag kritisch Stellung genommen hat. Ein wertvolles Nachschlagewerk steht dem Fachmann zur Verfügung, das ihm in seiner am Schlusse angeführten Zusammenstellung bedeutender Massivbrücken auch einen Überblick über das Bauschaffen der letzten Jahrzehnte auf dem Gebiete des Massivbrückenbaues bietet.

F. Pongratz, Wien.

Die Idee der Relativitätstheorie. Gemeinverständlich dargestellt von *H. Thirring*. Dritte, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 8 Textabb., VI, 168 S. Wien: Springer-Verlag. 1948. In Österreich: S 28.—. Im Ausland: sfr 12.—.

Die außerordentlich schwierige Aufgabe, die zwar weiteste Kreise interessierenden, aber infolge der mathematischen Schwierigkeiten nur wenigen leicht zugänglichen Probleme der speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie ohne Formelapparat zu erschließen, wird in vorbildlicher Weise gelöst. Einfach aber präzise wird jedem Leser, der dem klaren Gedankengang des Verfassers mit Aufmerksamkeit und Interesse folgt, gezeigt, daß die bloße Anerkennung der genügend gesicherten beiden Grundtatsachen, Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und Relativitätsprinzip, denotwendig auf die spezielle Relativitätstheorie führen muß. Sodann wird, ausgehend von den philosophischen Schwierigkeiten, die aus der Newtonschen Auffassung entstehen, dargelegt, daß es im leeren Raum keine Trägheitskräfte geben kann und daraus das Grundprinzip der allgemeinen Relativitätstheorie von der Äquivalenz der trägen und schweren Masse gefolgert. Für physikalisch vorgebildete Leser werden einige wenige wichtige Formeln als Fußnoten angeführt.

Der Verfasser, der den großen Wert der Relativitätstheorie schon im Jahre 1921 gelegentlich der ersten Auflage seines Buches richtig erkannt hat, und den seinerzeit meist unberechtigt erhobenen Einwänden mit allem Nachdruck entgegengetreten ist, kann es sich erlauben, die neue Auflage in fast unveränderter Form herauszugeben. Ein neu hinzugekommener Abschnitt über die Atomenergie, der den wichtigen Satz der speziellen Relativitätstheorie über die Äquivalenz von Masse und Energie endgültig sicherstellt, zeigt, wie recht der Verfasser schon in einer Zeit hatte, als die Anwürfe gegen Einstein nicht verstummen wollten.

Es ist sehr zu begrüßen, daß dieses schöne Buch wieder erhältlich ist.

F. Magyar, Wien.

Vorlesungen über Kernphysik. Von *Th. Seel*. Mit Textabb., VII, 177 S. Wien: F. Deuticke. 1948. S 35.—, geb. S 45.—.

In dem vorliegenden Buch behandelt der bekannte Verfasser ausgewählte Kapitel der theoretischen Kernphysik in Form von zehn Vorlesungen. Ausgehend von der Theorie der Rutherford-Streuung auf Grund der Newtonschen Mechanik wird der Leser sehr geschickt in die Notwendigkeit statistischer Betrachtungsweise der sog. Elementarprozesse eingeführt und im nächsten Kapitel die Rutherford-Streuung auf Grund der Wellenmechanik behandelt. Durch die Besprechung der Theorie der Laplaceschen Differentialgleichungen wird das weitere Studium des Buches ohne Beiziehung zusätzlicher Literaturquellen ermöglicht. In den folgenden Vorlesungen werden die Entwicklung der wellenmechanischen Lösung des Rutherford-Streuungsproblems nach Kugelfunktionen, die Theorie der Streuung gleichartiger Teilchen, die Theorie der inneren Streuung geladener und ungeladener Teilchen sowie die Theorie des Deuterons und des Schalenaufbaues leichter und schwerer Kerne besprochen.

Es handelt sich daher um eine sehr zweckmäßige Auswahl jener Probleme, die entweder streng oder näherungsweise als Einkörperproblem wellenmechanisch behandelt werden können. Die Aufgliederung des Buches nach Vorlesungen, an welche jeweils durchgerechnete Übungen angeschlossen sind, erleichtert das Studium des Stoffes und vermeidet das Zerreißen eines zusammenhängenden Komplexes durch Zwischenrechnungen. Das ausgezeichnete Buch, das viele eigene Arbeiten und Ableitungen des Autors enthält, wird sowohl von den Studierenden der Theoretischen Physik als auch von Experimentalphysikern und Ingenieuren, die sich für die theoretische Behandlung dieses modernsten Zweiges der Physik interessieren, mit bestem Erfolg benutzt werden.

In diesem Sinne füllt das gut ausgestattete Buch eine deutliche Lücke des modernen physikalischen Schrifttums aus und ist sein Erscheinen wärmstens zu begrüßen.

F. Regler, Wien.

Formänderungen von Vollwandtragwerken. Von Ing. L. Herzka,
Wien. Mit zahlreichen Beispielen, 28 Tabellen und 122 Abbildungen. V, 232 Seiten. 1948.
S 120.—, sfr. 52.—, \$ 12.—

Flächentragwerke. Einführung in die Elastostatik der Scheiben, Platten und
Faltwerke. Von Prof. Dr. techn. Ing. K. Girkmann. Zweite, verbesserte und ver-
mehrte Auflage. Mit 272 Abbildungen. XVI, 502 Seiten. 1948.
S 132.—, sfr. 66.—, \$ 15.40
Gebunden: S 138.—, sfr. 70.—, \$ 16.30

Rahmentragwerke und Durchlaufträger. Von Prof. Dr.-Ing. R. Guldán,
Hannover. Vierte, unveränderte Auflage. Mit 435 Abbildungen und 58 Tafeln. X,
357 Seiten. Erscheint im Februar 1949

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Prof. Dr. E. Müller †,
Wien, und Prof. Dr. E. Kruppa, Wien. Fünfte, neubearbeitete und ergänzte Auf-
lage. Mit 375 Abbildungen. IX, 404 Seiten. 1948. S 60.—, sfr. 26.—, \$ 6.—

Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung.
Von Prof. Dr. A. Duschek, Wien, und Dr. A. Hochrainer, Wien. In drei Teilen.

1. Teil: **Tensoralgebra.** Zweite Auflage. Mit 26 Abbildungen. VI, 129 Seiten. 1948.
S 27.—, sfr. 12.—, \$ 2.70

2. Teil: **Tensoranalysis.** Erscheint im Frühjahr 1949

3. Teil: **Anwendungen in Physik und Technik.** In Vorbereitung

Die Idee der Relativitätstheorie. Gemeinverständlich dargestellt. Von Prof.
Dr. H. Thirring, Wien. Dritte, verbesserte und ergänzte Auflage. Mit 8 Abbildungen.
V, 168 Seiten. 1948. S 28.—, sfr. 12.—, \$ 2.80

Zu beziehen durch jede Buchhandlung